**Universidad Politécnica de Cartagena**
**Departamento de Matemática Aplicada y Estadística**
**Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial**
**Examen de Matemáticas I**
**Grado en Ingeniero Mecánico, Primer Curso**
**Examen final, 24 de enero de 2012**

**Observaciones:**

**1) Sitúa el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.**

**2) Pon nombre, apellidos y grupo en todas las hojas, y el D.N.I. en la primera de ellas.**

**3) Escribe con bolígrafo (o similar) azul o negro. NUNCA a lápiz.**

**4) La duración del examen será de 3 horas y media.**

## PRIMER PARCIAL

1. (Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

   (a) **(0.5 puntos)** Encuentra una matriz de tamaño $2 \times 2$ que tenga un valor propio de multiplicidad 2 y que no sea diagonalizable.

   (b) **(1 punto)** Sea $S$ un subespacio vectorial del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^4$ en el que se considera el producto escalar usual y sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $S$. Detalla cómo se puede obtener una base ortonormal de $S$ dando la expresión en función de los vectores de $B$.

2. Sea $B = \{(1,0,-1), (-1,-1,0), (0,0,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz asociada viene dada por

$$M_{CC}(f) = \begin{pmatrix} x & 3 & -2 \\ 2 & y & 1 \\ -3 & z & 1 \end{pmatrix}$$

   y tal que $f(1,2,3) = (1,5,-6)$.

   (a) **(1 punto)** Demostrar que $x = 1, y = 0, z = -3$.

   (b) **(2.5 puntos)** Halla la matriz de $f$ respecto de la base $B$.

   (c) **(1 punto)** Sea $W =< (1,0,-1) >$. Halla una base de los subespacios $\ker f + W$ y $\ker f \cap W$.

3. **(2.5 puntos)** Consideremos la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula los valores propios de $M$. Prueba que la matriz es diagonalizable hallando una matriz diagonal y una matriz de paso asociadas.

4. **(1.5 puntos)** Calcula el polinomio de Taylor de la función $f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$ de grado 2 en el punto $x_0 = 0$. Da una aproximación del valor de $f(0.1)$ y obtén una cota superior del error cometido en dicha aproximación.

## SEGUNDO PARCIAL

5. Calcula las siguientes integrales

   (a) **(2 puntos)**

$$\int \frac{\cos x}{4 - \sin^2 x} dx$$

   (b) **(1.25 puntos)**

$$\int_3^{+\infty} \frac{x}{(8 - 2x^2)^4} dx$$

6. **(2 puntos)** Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x, y) = (x \log y, 3, \frac{x^2 - y}{y^2 + 1}, e^{\sin(\pi x)})$$

halla en el punto $Q = (2, 3)$ tanto la matriz jacobiana como la expresión de la diferencial de $f$. Calcula también la derivada direccional de la función en el mismo punto $Q$, respecto del vector $v = (-4, 1)$.

7. **(2 puntos)** Determinar los extremos absolutos de la función

$$f(x, y) = x^2 y + 2xy^2 + 2xy$$

en el conjunto

$$\Omega = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) **(1.25 puntos)**

$$e^{2x} y' = yx$$

   (b) **(1.5 puntos)**

$$y'' - 9y' + 8y = 5 \cos 3x$$