

Universidad Politécnica de Cartagena
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial
Examen de Matemáticas I
Grado en Ingeniero Mecánico, Primer Curso
Examen parcial, 24 de enero de 2012

Observaciones:

- 1) Sitúa el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
- 2) Pon nombre, apellidos y grupo en todas las hojas, y el D.N.I. en la primera de ellas.
- 3) Escribe con bolígrafo (o similar) azul o negro. NUNCA a lápiz.
- 4) La duración del examen será de 3 horas y media.

1. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

- (a) **(0.5 puntos)** Si tenemos un espacio vectorial V con una base $\{u_1, u_2, u_3\}$ probar que $\{u_1 - u_3, -u_1 + 2u_2, u_3\}$ es de nuevo una base de V .
- (b) **(0.25 puntos)** Encuentra una matriz de tamaño 2×2 que tenga un valor propio de multiplicidad 2 y que no sea diagonalizable.
- (c) **(0.5 puntos)** Sea S un subespacio vectorial del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^4$ en el que se considera el producto escalar usual y sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base de S . Detalla cómo se puede obtener una base ortonormal de S dando la expresión en función de los vectores de B .
- (d) **(0.25 puntos)** En $\mathbb{R}^2$ ¿es $(1, 1)$ un vector unitario? En caso negativo ¿podrías dar dos vectores unitarios distintos que sean proporcionales a él?

2. Sea $B = \{(1, 0, -1), (-1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz asociada viene dada por

$$M_{CC}(f) = \begin{pmatrix} x & 3 & -2 \\ 2 & y & 1 \\ -3 & z & 1 \end{pmatrix}$$

y tal que $f(1, 2, 3) = (1, 5, -6)$.

- (a) **(0.75 puntos)** Demostrar que $x = 1, y = 0, z = -3$.
- (b) **(1.5 puntos)** Halla la matriz de f respecto de la base B .
- (c) **(1 puntos)** Determina bases del núcleo y de la imagen de f y estudia la inyectividad y suprayectividad de la aplicación.
- (d) **(0.75 puntos)** Sea $W = \langle (1, 0, -1) \rangle$. Halla una base de los subespacios $\ker f + W$ y $\ker f \cap W$.

3. **(1.75 puntos)** Consideremos la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula los valores propios de M y los subespacios propios. Prueba que la matriz es diagonalizable hallando una matriz diagonal y una matriz de paso asociadas.

4. **(1.25 puntos)** Calcula el límite

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (\cos 2x)^{\frac{2}{(x-\pi)^2}}$$

5. **(1.5 puntos)** Calcula el polinomio de Taylor de la función $f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$ de grado 2 en el punto $x_0 = 0$. Da una aproximación del valor de $f(0.1)$ y obtén una cota superior del error cometido en dicha aproximación.