

**Universidad Politécnica de Cartagena**  
**Departamento de Matemática Aplicada y Estadística - ETSII**  
**Examen de Matemáticas I**  
**Grado en Ingeniería Mecánica, 1 de septiembre de 2014**

**Primer cuatrimestre**

1.- Sea la aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por

$$f(x, y, z) = (x - by, ax + y, x + y + (a + 2)z).$$

a) Hallar los valores de  $a$  y  $b$  para que se cumplan las condiciones

$$(0, 0, 1) \in \ker f$$

$$f(1, -2, 3) = (3, -4, -1)$$

**(2 puntos)**

b) Para  $a = 1, b = -1$  obtener la matriz  $M_{C,C}(f)$  siendo  $C$  la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ . Para esos mismos valores determinar si  $f$  es inyectiva y/o suprayectiva, hallando además una base tanto del núcleo como de la imagen de  $f$ . **(2.5 puntos)**

2.- Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Comprobar si  $A$  es o no diagonalizable, hallando los valores propios y una base de cada subespacio propio. En caso de ser diagonalizable determinar una matriz diagonal y una matriz de paso semejantes. **(3 puntos)**

3.- Calcular el polinomio de Taylor de grado tres centrado en el punto  $a = -1$  de la función

$$f(x) = \frac{3}{x} + x^4 - \sin \pi x$$

**(2.5 puntos)**

## Segundo cuatrimestre

4.- Calcular:

$$\int \arctan x dx \quad (1.5 \text{ puntos})$$

5.- En la ecuación

$$x^3y^2 - 3xy + 2 = 0$$

se considera  $y$  como función implícita de  $x$  (de la forma  $y = Y(x)$ ) en un entorno del punto  $(1, 2)$ . Obtener las derivadas primera y segunda de dicha función en el punto  $x = 1$ , así como la recta tangente a la curva  $y = Y(x)$  en dicho punto. (2.5 puntos)

6.- Calcular  $\iint_{\Omega} (x - y) dx dy$  siendo  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2x\}$  (2.5 puntos)

7.- a) Resolver la ecuación diferencial

$$y'' + Ky = 0 \quad (1.5 \text{ puntos})$$

en función del parámetro  $K \in \mathbb{R}$ .

b) Resolver el problema de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} xy' - y^2 = y \\ y(1) = 4 \end{cases} \quad (2 \text{ puntos})$$