Universidad Politécnica de Cartagena

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística - ETSII

Examen de Matemáticas I

Grado en Ingeniería Mecánica, 19 de junio de 2012

Primer cuatrimestre

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal, y consideremos la base de $\mathbb{R}^3$ $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ donde $e_1 = (-1, 2, 1)$, $e_2 = (-1, 0, 0)$ y $e_3 = (-1, 1, 0)$. Supongamos que:

$$\mathrm{M}_B(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ x & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

donde $x \in \mathbb{R}$ cumple que tal que $e_1 + e_2 \in \mathbb{K}erf$.

i) Demuestra que $x = 1$. **(1.2 puntos)**

ii) Calcula la matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y su expresión analítica. **(1.6 puntos)**

iii) Estudia la inyectividad y suprayectividad de f. Calcula bases del núcleo y de la imagen de f. **(1.2 puntos)**

2. Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Analiza si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula la matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada.

(3 puntos)

3.

$$\lim_{x \to \pi} \frac{1 - \mathrm{e}^{(\pi - x)^2}}{1 + \cos x}.$$

(3 puntos)

Segundo cuatrimestre

4. Calcula $\int_{-4}^{\sqrt{3}-4} \sqrt{-x^2-8x-12}\,dx$. **(2 puntos)**

5. Analiza la continuidad de la función f en el punto $(0,0)$ y calcula, si existen, tanto las derivadas direccionales como las derivadas parciales en $(0,0)$, siendo f la función $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(Ojo, no se pide nada sobre la diferenciabilidad) (1.5 puntos)

6. Calcula los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + 3y$ en el recinto D limitado por la recta e $y = x - 3$ y la parábola $y = x^2 - 4x + 1$, o sea, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 - 4x + 1, y \leq x - 3\}$. **(2 puntos)**

7. Calcula $\int\int_\Omega x dx dy$ siendo Ω el recinto limitado por las curvas $y = x^2 - 2x + 1$ e $y = x + 1$, o sea, $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 - 2x + 1, y \leq x + 1\}$. **(2 puntos)**

8. Resuelve el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' + 4y = 13\mathrm{e}^{3x} \\ y(0) = -1, y'(0) = 5 \end{cases}.$$

(2.5 puntos)