Universidad Politécnica de Cartagena
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística - ETSII
Examen de Matemáticas I
Grado en Ingeniería Mecánica, 2 de septiembre de 2016

Primer cuatrimestre

Observaciones:

1) Sitúa el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.

2) Escribe con bolígrafo (o similar) azul o negro. NUNCA a lápiz.

3) *Se debe elegir entre los ejercicios 2 y 3.*

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to V$ una aplicación lineal tal que existen vectores $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ tales que $V =< f(u_1), f(u_2), f(u_3) >$.

   (a) (**0.75 puntos**) Justifica que f es suprayectiva.

   (b) (**0.75 puntos**) Si $\dim V = 3$, prueba que deben formar u_1, u_2, u_3 una base de $\mathbb{R}^3$. ¿Ocurriría lo mismo si $\dim V = 2$? Es decir, ¿deben constituir forzosamente dichos vectores una base de $\mathbb{R}^3$ en el caso en que $\dim V = 2$?

2. **(2.5 puntos)** Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que cumple que

$$M_{BC}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

   donde las bases consideradas son $B = \{(1, 0, 1), (-1, 1, -1), (1, -1, 0)\}$ y C la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Hallar la expresión analítica de f, una base de la imagen de la aplicación y decir si f es o no biyectiva.

3. (**2.5 puntos**) En $\mathbb{R}^4$, con el producto escalar euclídeo, calcular una base ortonormal del subespacio

$$S =< (1, 0, -2, 1), (2, 2, -1, 0) > .$$

   Hacer lo mismo con el producto escalar siguiente:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (y_1, y_2, y_3, y_4) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + 2x_4y_4.$$

4. **(3.5 puntos)** Estudiar cuándo es diagonalizable la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ n & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

en función de los valores de los parámetros m y n, determinando una matriz diagonal asociada cuando sea posible. Para los valores $m = 2, n = 0$, hallar además una matriz de paso.

5. **(2.5 puntos)** Obtener el polinomio de Taylor de grado 2 de la función $\arctan x$ con centro en el punto $x_0 = 0$. Determinar la expresión del resto correspondiente en el punto $x = 1$.

Segundo cuatrimestre

1.- **(2.5 puntos)** Calcular:

$\int \frac{3x^2-2x+8}{x^3-2x^2+4x-8}dx$

2.- **(2 puntos)** En la ecuación

$$x^3y^2 - 3xy + 2 = 0$$

probar que y se puede poner como función implícita de x (de la forma $y = Y(x)$) en un entorno del punto $(1, 2)$. Obtener las derivadas primera y segunda de dicha función en el punto $x = 1$, así como la recta tangente a la curva $y = Y(x)$ en dicho punto.

3.- **(2 puntos)** Calcular $\iint\limits_{\Omega}(x - y)dxdy$ siendo Ω el recinto limitado por las curvas $y = x^2, y = 2x$ y la recta vertical $x = 1$

4.- a) **(1.5 puntos)** Resolver la ecuación diferencial

$$y'' - 4y = 8x^2$$

b) **(2 puntos)** Resolver el problema de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} xy' - y^2 & = & y \\ y(1) & = & 4 \end{cases}$$