

Universidad Politécnica de Cartagena
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística - ETSII
Primer examen PARCIAL de Matemáticas I
Grado en Ingeniería Mecánica, 9 de febrero de 2017

Observaciones:

- 1) *Sitúa el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.*
- 2) *Escribe con bolígrafo (o similar) azul o negro. NUNCA a lápiz.*
- 3) *La duración del examen es de 3 horas.*
- 4) *Queda prohibido disponer de cualquier dispositivo electrónico (móvil, tablet, etc.).*
- 5) *No se podrá utilizar calculadora.*

1. **(0.25 puntos cada una)** Responde a las siguientes cuestiones, razonando la respuesta.

- (a) Si $\{u, v\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ entonces también lo es el sistema $\{2u, u - v\}$.
- (b) Si $\{u, v\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ y g es un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ entonces $\{g(u), g(v)\}$ es también una base de $\mathbb{R}^2$.
- (c) Todo par de vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes son base de algún espacio vectorial.
- (d) Si 2 vectores de $\mathbb{R}^2$ son linealmente dependientes entonces uno de ellos debe ser nulo.

2. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (x - y + 2z, y - z, x + z)$. Sea B la siguiente base de $\mathbb{R}^3$: $B = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 1), (1, -1, 0)\}$. Se pide:

- (a) **(1.25 puntos)** Obtén una base de $\ker f$, unas ecuaciones implícitas de $\text{Im } f$ y di si f es inyectiva y/o suprayectiva. Prueba que $\ker f \oplus \text{Im } f = \mathbb{R}^3$.
- (b) **(0.5 puntos)** Calcula la matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
- (c) **(1.25 puntos)** Halla la matriz asociada a f respecto de la base B .

3. Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 2 & a & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

responde razonadamente a las siguientes preguntas:

- (a) **(2 puntos)** Para $a = 3, b = -10$ justifica que M es diagonalizable, halla una matriz diagonal y una matriz de paso asociadas.
- (b) **(1 punto)** Elige uno de los 2 siguientes apartados:

1. Halla la otra matriz de paso, inversa de la calculada anteriormente.
 2. Estamos en una situación diferente a la de los apartados a) y b.1). Supongamos que $a = 6$ y M es diagonalizable. Determina el valor de b .
4. Consideremos la función $F(x) = \operatorname{sen} x + 4e^x$.
- (a) **(1 punto)** Demuestra que la ecuación $F(x) = 0$ tiene alguna solución.
 - (b) **(1 punto)** Elige 1 de los 2 siguientes apartados:
 1. Calcula el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - 4}{x}$
 2. Analiza la continuidad en el punto $a = 0$ de la función $h(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x^2 + 1}{3x - 1} + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$
5. **(1 punto)** Se considera, en $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar euclídeo, el siguiente subespacio:
 $W = \langle (2, 0, -1), (0, -4, 1) \rangle$
 Obtén una base ortonormal de W .