

Universidad Politécnica de Cartagena
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística - ETSII
Examen FINAL de Matemáticas I
Grado en Ingeniería Mecánica, 9 de febrero de 2017

Observaciones:

- 1) Sitúa el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
- 2) Escribe con bolígrafo (o similar) azul o negro. NUNCA a lápiz.
- 3) La duración del examen es de 3 horas.
- 4) Queda prohibido disponer de cualquier dispositivo electrónico (móvil, tablet, etc.).
- 5) No se podrá utilizar calculadora.

Primer cuatrimestre

1. **(0.5 puntos cada una)** Responde a las siguientes cuestiones, razonando la respuesta.
 - (a) Si $\{u, v\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ entonces también lo es el sistema $\{2u, u - v\}$.
 - (b) Si $\{u, v\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ y g es un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ entonces $\{g(u), g(v)\}$ es también una base de $\mathbb{R}^2$.
2. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (x - y + 2z, y - z, x + z)$. Sea B la siguiente base de $\mathbb{R}^3$: $B = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 1), (1, -1, 0)\}$. Se pide:
 - (a) **(1.5 puntos)** Obtén una base de $\ker f$, unas ecuaciones implícitas de $\text{Im } f$ y di si f es inyectiva y/o suprayectiva.
 - (b) **(1 punto)** Calcula la matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
 - (c) **(1.5 puntos)** Halla la matriz asociada a f respecto de la base B .
3. Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 2 & a & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

responde razonadamente a las siguientes preguntas:

- (a) **(1.5 puntos)** Para $a = 3, b = -10$ justifica que M es diagonalizable y halla una matriz diagonal asociada.
- (b) **(1.25 puntos)** Elige uno de los 2 siguientes apartados:
 1. Halla una matriz de paso asociada.
 2. Estamos en una situación diferente a la de los apartados a) y b.1). Supongamos que $a = 6$ y M es diagonalizable. Determina el valor de b .

4. Consideremos la función $F(x) = \operatorname{sen} x + 4e^x$.

(a) **(1.25 puntos)** Demuestra que la ecuación $F(x) = 0$ tiene alguna solución.

(1 punto) Elige 1 de los 2 siguientes apartados:

i) Calcula el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - 4}{x}$

ii) Analiza la continuidad en el punto $a = 0$ de la función $h(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x^2 + 1}{3x - 1} + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Segundo cuatrimestre

5. **(2 puntos)** Calcula:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} + 1}.$$

6. **(2 puntos)** Calcula $\int \int_{\Omega} x\sqrt{y} \, dx dy$, siendo $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, x \leq 0, y \geq 0\}$

7. **(2 puntos)** Aplicando los métodos estudiados, determina los extremos absolutos de la función

$f(x, y) = 3 + (x + 1)^2 + y^2$ en el conjunto compacto D limitado por las rectas $y = -2$, $y = 2x + 2$ e $y = -2x + 2$.

8. **(2 puntos)** Resuelve la ecuación diferencial

$$y' = \frac{x^3 - xy^2 + y^3}{xy^2 - x^2y}$$

Indicación: Haz el cambio $u = \frac{y}{x}$

9. **(2 puntos)** Resuelve el siguiente problema de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y'' + 9y = -13 \cdot e^{2x} \\ y(0) = -3, y'(0) = 1 \end{cases}.$$