

Observaciones:

- 1) Sitúa el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
- 2) Pon nombre, apellidos, especialidad y grupo en todas las hojas, y el D.N.I. en la primera de ellas.
- 3) Escribe con bolígrafo (o similar) azul o negro. NUNCA a lápiz.
- 4) La duración del examen será de 3 horas.
- 5) Los alumnos que se examinen de toda la asignatura deben realizar los ejercicios del segundo parcial además de los siguientes ejercicios del primer parcial: 4 apartados a elegir del ejercicio 1; los ejercicios 2 y 5; un ejercicio a elegir de entre el 3 y el 4.

Primer Parcial

1. (3 puntos) Da respuesta (positiva o negativa) brevemente a las siguientes cuestiones, justificando dicha respuesta.
 - a. Dado el subespacio $W = \langle (2, 3) \rangle$ de $\mathbb{R}^2$ se tiene que $\dim W = 2$.
 - b. El producto escalar de dos vectores $(x, y), (z, t)$ vale $(x, y) \cdot (z, t) = (xz, yt)$.
 - c. Si f es una aplicación lineal y $v \in \ker f$ entonces $f(v) = 0$.
 - d. Si A es una matriz cuadrada de orden 2 y se cumple que $A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ entonces $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ es un vector propio de A . En caso afirmativo halla el valor propio.
 - e.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{100}}{e^x} = +\infty$$

- f. El Teorema de Bolzano asegura que la función x^4 tiene una raíz en el intervalo $[-2, 2]$.
2. (1.5 puntos) Consideremos en $\mathbb{R}^2$ las bases
$$B = \{(7, 1), (-5, 0)\}, \quad B' = \{(1, 3), (-1, 2)\}.$$
Calcula la matriz de cambio de base de B a B' y utilízala para calcular las coordenadas del vector v en la base B' , siendo v el vector cuyas coordenadas en la base B son $v_B = (5, 1)$.
3. (2 puntos) Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtén una matriz diagonal D y una matriz invertible P tales que $A = PDP^{-1}$.

4. (2.5 puntos) En $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar euclídeo, se considera el subespacio vectorial

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = 0\}.$$

Determina una base de ortonormal de dicho subespacio. Determina además la proyección ortogonal del vector $v = (0, 1, 5)$ sobre W .

5. (1 punto) Halla el polinomio de Taylor de grado 2 de la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ en el punto $a = 0$.

Segundo Parcial

1. (2.5 puntos) Calcula $\int \frac{3x^2-5x+20}{x^3-3x^2+12x-10} dx$.
2. (3 puntos) Dada la función $f(x,y) = \operatorname{sen} x \cos y$ halla la diferencial de f en el punto $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$, así como su derivada direccional en dicho punto en la dirección del vector $(1, -2)$. Halla también las derivadas segundas de f en todo punto.
3. (2.5 puntos) Se supone que la ecuación $e^{x-3z} + \cos(y+z) = 2$ define a z como función implícita de x e y en un entorno del punto $(3, -1, 1)$. Calcula las derivadas parciales de z en el punto $(3, -1)$ y la ecuación del plano tangente a la función $z = z(x, y)$ en el punto $(3, -1)$.
4. (2 puntos) Resuelve la ecuación diferencial $\cos x - y^2 + (\operatorname{sen} y - 2xy)y' = 0$.