

Universidad Politécnica de Cartagena
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Examen de Matemáticas I
Grado en Ingeniería Mecánica, Examen de junio
14 de junio de 2011

Primer cuatrimestre

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal, y consideremos la base de \mathbb{R}^3 $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ donde $e_1 = (-1, 0, -1)$, $e_2 = (0, 1, 1)$ y $e_3 = (0, -1, 0)$. Supongamos que:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

donde $x \in \mathbb{R}$ cumple que tal que $f(e_1 + e_2) = (1, 0, 2)$.

i) Demuestra que $x = -1$.

ii) Calcula la matriz de f respecto de la base canónica de \mathbb{R}^3 y su expresión analítica.

iii) Estudia la inyectividad y suprayectividad de f . Calcula bases del núcleo y de la imagen de f .

(4 puntos)

2. Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Analiza si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula la matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada.

(3 puntos)

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1) - \operatorname{sen}^2 x - x}{\operatorname{sen} x^2}.$$

(3 puntos)

Segundo cuatrimestre

4. Calcula $\int_{-2}^{\sqrt{2}-2} \sqrt{-x^2 - 4x} dx$. (2 puntos)

5. Calcula

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{4+x^4} dx.$$

(1 punto)

6. Dada la función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = 2x^2yz + xy + yz^2$, calcula la expresión analítica de la diferencial $\mathbf{d}f(1, 1, -1)$ y calcula $\mathbf{D}_{(1,-1,0)}f(1, 1, -1)$. (1 punto)

7. Aplicando los métodos estudiados en clase, calcula los extremos absolutos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -x^2 + 4, x \leq y - 2\}$. (1.5 puntos)

8. Calcula $\int \int_{\Omega} x dx dy$ siendo Ω el recinto limitado por las curvas $y = -x^2 + 4x$ e $y = x$, o sea, $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -x^2 + 4x, x \leq y\}$. (1.5 puntos)

9. Resuelve la ecuación diferencial $y' - y = xy^2$ (el cambio de variables $z = y^{-1} = \frac{1}{y}$ puede serte útil). (1 punto).

10.
$$\begin{cases} -y'' + 4y' = 75\cos(3x) \\ y(0) = 5, y'(0) = 8 \end{cases} . \text{ (2 puntos)}$$