Universidad Politécnica de Cartagena
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial
Examen de Matemáticas I
Ingeniería Mecánica, Primer Curso. Grupos 1, 2 y 3
Examen final, 11 de Septiembre de 2013

Observaciones:
1) Sitúa el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
2) Pon nombre, apellidos, especialidad y grupo en todas las hojas, y el D.N.I. en la primera de ellas.
3) Escribe con bolígrafo (o similar) azul o negro. NUNCA a lápiz.
4) La duración del examen será de 3 horas y media.

Primer cuatrimestre

1. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya expresión analítica es $f(x,y,z) = (x+y, x+y, z)$ y consideramos la base de $\mathbb{R}^3$ dada por $B = \{(-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1)\}$.

   (a) **(0.5 puntos)** Determina la matriz asociada $M_C(f)$, donde C es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   (b) **(1.5 puntos)** Determina la matriz asociada $M_B(f)$.

   (c) **(1.5 puntos)** Halla una base de los subespacios $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$, y estudia si f es biyectiva, inyectiva o sobreyectiva .

2. **(3.5 puntos)** Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Analiza si es diagonalizable y, en caso afirmativo, calcula una matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada.

3. (a) **(1.5 puntos)** Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\sqrt[4]{x}. \ln x \right)$$

   (b) **(1.5 puntos)** Halla el polinomio de Mc Laurin de grado 3 de la función $f(x) = \ln(1+x)$, utilízalo para hallar el valor aproximado de ln (1.5), y acota utilizando el resto de Lagrange el error cometido.

Segundo cuatrimestre

4. **(3 puntos)** Calcula la integral

$$\int \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} . \frac{dx}{(1-x)^2}$$

(*Indicación* : *Utilizar* el cambio de variable $t = \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$)

5. **(2 puntos)** Estudia en el punto $(0,0)$, la continuidad, la existencia de las derivadas direccionales y en particular la existencia de las derivadas parciales, de la función $f(x,y)$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2.y}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

6. **(2 puntos)** Calcula $\iint\limits_{\Omega} xydxdy$ siendo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \geq 0\}$

es decir, Ω está formado por los puntos en el segundo cuadrante del círculo de centro el origen $O(0,0)$, y radio 2 .

7. **(3 puntos)** Resolver el problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y & = & -10\cos x \\ y(0) & = & -1 \\ y'(0) & = & 0 \end{cases}$$