

Universidad Politécnica de Cartagena
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística - ETSII

Examen de Matemáticas I

Grado en Ingeniería Mecánica, 25 de enero de 2013

Primer cuatrimestre

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal, y consideremos la base de \mathbb{R}^3 $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ donde $e_1 = (-1, 1, 0)$, $e_2 = (-1, 2, 0)$ y $e_3 = (0, 1, 1)$. Supongamos que:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

donde $x \in \mathbb{R}$ cumple que $f(e_1 + e_2) = f(e_3)$.

i) Demuestra que $x = -1$. **(1.2 puntos)**

ii) Calcula la matriz de f respecto de la base C y su expresión analítica. **(1.6 puntos)**

iii) Estudia la inyectividad y suprayectividad de f . Calcula bases del núcleo y de la imagen de f . **(1.2 puntos)**

2. Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analiza si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula la matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada.

(3 puntos)

3. Calcula

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos^2 x}{\cos x^2 - \operatorname{sen}(2x) - 1}.$$

(1.5 puntos)

ii) Estudia con todo detalle la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = e^{|x|}$. **(1.5 puntos)**

Segundo cuatrimestre

4. Calcula $\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{5}} \sqrt{1 - 25x^2} dx$. **(2 puntos)**

5. Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x^2 - 2xy, x^3 + xy, y^3 - 2x^2y)$, calcula la diferencial de f en el punto $(1, -1)$. **(1.5 puntos)**

6. Aplicando los métodos estudiados en clase, calcula los extremos absolutos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -x^2 + 9, y \geq x + 3\}$. **(2 puntos)**

7. Calcula $\int \int_{\Omega} x dx dy$ siendo Ω la parte del círculo de centro $(0, 0)$ y radio 3 del tercer y cuarto cuadrante, esto es, $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9, y \leq 0\}$. **(2 puntos)**

8. Resuelve el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' + 4y = 29e^{5x} \\ y(0) = 3, y'(0) = 3 \end{cases}.$$

(2.5 puntos)