

Universidad Politécnica de Cartagena
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial
Examen de Matemáticas I
Ingeniería Mecánica, Primer Curso. Grupos 1, 2 y 3
Examen final, 1 de Septiembre de 2012

Observaciones:

- 1) Sitúa el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
- 2) Pon nombre, apellidos, especialidad y grupo en todas las hojas, y el D.N.I. en la primera de ellas.
- 3) Escribe con bolígrafo (o similar) azul o negro. **NUNCA** a lápiz.
- 4) La duración del examen será de **3 horas y media**.

Primer Parcial

1. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya expresión analítica es $f(x, y, z) = (x + 2y - z, -y + 3z, z)$ y consideremos la base de \mathbb{R}^3 dada por $B = \{(0, 0, -1), (0, 2, 1), (-1, 1, 4)\}$.
 - (a) Determina 2 de las matrices asociadas siguientes $M_{C_3 \rightarrow C_3}(f), M_{B \rightarrow C_3}(f), M_{C_3 \rightarrow B}(f), M_{B \rightarrow B}(f)$, siendo C_3 la base canónica de \mathbb{R}^3 . **(2 puntos)**
 - (b) Halla una base de cada uno de los subespacios $\ker f$ e $\text{Im } f$ de \mathbb{R}^3 . Indica si f es inyectiva y también si f es suprayectiva **(1.5 puntos)**

2. Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Analiza si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula una matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociadas. **(3.5 puntos)**

3. Calcula el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \arctan x}$ **(3 puntos)**

Segundo Parcial

4. Calcula las integrales siguientes:

(a) $\int \frac{12}{x^2 - 4} dx$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x dx$

(c) $\int_0^{+\infty} e^{-3x} dx$

(3 puntos)

5. Obtén la matriz jacobiana de la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x^2 + \sin y, ze^{xy})$ en todo punto posible, y en particular en el punto $(1, 0, -1)$. **(2 puntos)**

6. Aplicando los métodos explicados en clase, calcula los extremos absolutos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ en el recinto cerrado D limitado por los ejes coordenados y la recta $x + y = 1$, es decir,

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

(2 puntos)

7. Resuelve dos de las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $y' + \frac{y}{x} = e^{-x}$

(b) $2xy + \cos x + x^2 y' = 0$

(c) $y'' + 4y = x^2$

(3 puntos)