Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica, ambos turnos)
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Examen final (10 de Setiembre de 2010)

Observaciones:

1) Situar el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.

2) Escribir nombre y apellidos en todas las hojas. Escribir también el D.N.I. en la primera de ellas.

3) Escribir con bolígrafo (o similar) azul o negro. NUNCA a lápiz.

4) La duración del examen será de 3 horas y media.

1. **(0.25 puntos cada apartado)** Responder razonadamente (justificando la respuesta) a las siguientes preguntas:

   (a) Todos los valores propios de una matriz real antisimétrica son reales.

   (b) Si $\{u_1, u_2, u_3\}$ es base de $\mathbb{R}^3$, entonces cualesquiera que sean los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, se cumple que $\{\alpha_1 u_1, \alpha_2 u_2, \alpha_3 u_3\}$ es base de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Toda matriz cuadrada es semejante a una matriz triangular.

   (d) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función y a es un punto crítico de f, (es decir todas las derivadas parciales de f se anulan en a),en el que la matriz hessiana tiene determinante positivo, entonces f tiene un mínimo local en a .

   (e) Explicar en qué consiste una ecuación diferencial homogénea. Poner además un ejemplo.

   (f) El problema de valor inicial: $\{ y'' - 5y' + 6y = 0,\ y(0) = 1\}$, tiene solución única.

2. Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$ se pide:

   (a) **(0.75 puntos)** Estudiar cuando es diagonalizable según los valores de los parámetros a y b .

   (b) **(0.75 puntos)** Para $a = 0$ y $b = 0$, hallar una matriz diagonal semejante y una matriz de paso. Escribir también la relación de semejanza entre las dos matrices.

3. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que verifica: $f(0,1,1) = (1,-1)$; $f(1,0,1) = (0,1)$; $f(1,1,0) = (1,0)$.

(a) **(0.25 puntos)** Determinar la matriz de f respecto de las bases $B = \{u_1(0,1,1), u_2(1,0,1), u_3(1,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y de la C_2 canónica de $\mathbb{R}^2$.

(b) **(0.75 puntos)** Hallar la matriz de f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^2$.

(c) **(0.5 puntos)** Hallar una base de $\ker f$.

4. **(0.75 puntos)** Calcular la integral $\int e^{2x}\sqrt{e^x - 1}dx$

5. **(0.5 puntos)** Estudia la convergencia de las series:

   i) $\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{5n^2+7}$ *ii)* $\sum_{n\geq 1} \sqrt[n]{e^{-n}(n+1)}$

6. Se considera la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

En todo punto de $\mathbb{R}^2$ se pide:

(a) **(0.25 puntos)** Estudiar la continuidad de f .

(b) **(0.25 puntos)** Estudiar la diferenciabilidad de f .

(c) **(0.25 puntos)** Hallar la expresión analítica de la diferencial de f .

7. (a) **(0.75 puntos)** La ecuación $e^{z+x} - \cos(x+y+z) = 0$ define a z como función implícita de las variables x, y en un entorno de $(0,0,0)$. Hallar el polinomio de Taylor de grado dos de z en $(0,0)$.

   (b) **(0.5 puntos)** Hallar los extremos locales de la función $f(x,y) = e^{x^2+x+y} + x - y$.

8. (a) **(0.75 puntos)** Resolver el problema de valores iniciales: $\begin{cases} y'' - 5y' + 6y &= e^{2x} \\ y(0) &= 2 \\ y'(0) &= 4 \end{cases}$

   (b) **(0.5 puntos)** Resuelve el sistema: $\begin{cases} x'(t) &= x(t) + y(t) \\ y'(t) &= x(t) - y(t) \end{cases}$