Departamento
de Matemática
Aplicada y
Estadística

Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica, ambos turnos)
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Examen final (10 de Setiembre de 2010)

Observaciones:
1) Situar el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
2) Escribir nombre y apellidos en todas las hojas. Escribir también el D.N.I. en la primera de ellas.
3) Escribir con bolígrafo (o similar) azul o negro. NUNCA a lápiz.
4) La duración del examen será de 3 horas y media.

SEGUNDO PARCIAL

1. **(0.25 puntos cada apartado)** Responder razonadamente (justificando la respuesta) a las siguientes preguntas:
   (a) Si $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ siendo A abierto de $\mathbb{R}^2$ verifica $Df(x) = 0$, $\forall\, x \in A$, entonces f es constante en A .
   (b) Explicar en qué consiste una ecuación diferencial homogénea. Poner además un ejemplo.
   (c) Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función y a es un punto crítico de f, (es decir todas las derivadas parciales de f se anulan en a),en el que la matriz hessiana tiene determinante positivo, entonces f tiene un mínimo local en a .
   (d) El problema de valor inicial: $\{\, y" - 5y' + 6y = 0,\, y(0) = 1\}$, tiene solución única.
   (e) Si $\sum\limits_{n\geq 1} a_n^2$ es divergente, entonces $\sum\limits_{n\geq 1} |a_n|$ es divergente.
   (f) Si $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tienen en a un mínimo local, entonces $f + g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tiene en a un mínimo local.

2. **(0.5 puntos)** Estudia la convergencia de las series:
   $i)\ \sum\limits_{n\geq 1} \frac{2n+1}{5n^2+7}$ $\qquad ii)\ \sum\limits_{n\geq 1} \sqrt[n]{e^{-n}(n+1)}$

3. Se considera la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

En todo punto de $\mathbb{R}^2$ se pide:

(a) **(0.5 puntos)** Estudiar la continuidad de f .

(b) **(0.25 puntos)** Estudiar la diferenciabilidad de f .

(c) **(0.5 puntos)** Hallar la expresión analítica de la diferencial de f .

4. (a) **(0.5 puntos)** Justificar que la ecuación $e^{z+x} - \cos(x+y+z) = 0$ define a z como función implícita de las variables x, y en un entorno de $(0,0,0)$.

   (b) **(0.75 puntos)** Hallar el polinomio de Taylor de grado dos de z en $(0,0)$.

5. **(0.75 puntos)** Hallar los extremos locales de la función $f(x,y) = e^{x^2+x+y} + x - y$.

6. **(1 punto)** Hallar las coordenadas de los puntos del espacio $\mathbb{R}^3$ que cumplen las ecuaciones $z = x^2 + y^2$, $x + y + z = 1$, y que están a distancia máxima y mínima del origen de coordenadas.

7. (a) **(0.75 puntos)** Resolver el problema de valores iniciales: $\left\{\begin{array}{lcl} y'' - 5y' + 6y & = & e^{2x} \\ y(0) & = & 2 \\ y'(0) & = & 4 \end{array}\right.$

   (b) **(0.75 puntos)** Resuelve el sistema: $\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & x(t) + y(t) \\ y'(t) & = & x(t) - y(t) \end{array}\right.$

8. Resolver las ecuaciones diferenciales:

   (a) **(0.5 puntos)** $2x + e^{x+y} + (2y + e^{x+y})y' = 0$

   (b) **(0.75 puntos)** $y' = \frac{x+y}{x-y}$