

EXAMEN FINAL

Observaciones:

- 1) Sitúa el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
- 2) Escribe nombre y apellidos en todas las hojas. Escribe también el D.N.I. en la primera de ellas.
- 3) Escribe con bolígrafo (o similar) azul o negro. NUNCA a lápiz.
- 4) La duración del examen será de 3 horas y media.

1. Pon ejemplos (justificándolos) de:

- (a) **(0.25 Puntos)** Un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ que no sea inyectivo.
- (b) **(0.25 Puntos)** Tres vectores de $\mathbb{R}^2$ que no formen un sistema generador de $\mathbb{R}^2$.
- (c) **(0.25 Puntos)** Un sistema de ecuaciones lineales con 3 ecuaciones y 2 incógnitas que tenga como única solución $x = -2, y = 3$.

2. Se considera el endomorfismo F de $\mathbb{R}^3$ que cumple que

$$\begin{aligned}F(u_1) &= 2u_1 + 4u_2 + u_3 \\F(u_2) &= 3u_2 + u_3 \\F(u_3) &= -u_3\end{aligned}$$

siendo

$$B = \{u_1, u_2, u_3\}$$

una base de $\mathbb{R}^3$.

- (a) **(0.5 Puntos)** Halla A , la matriz asociada a F en la base de B .
- (b) **(0.5 Puntos)** Halla los valores propios del endomorfismo F (o los de la matriz A).
- (c) **(0.5 Puntos)** Estudia si F (ó A) es diagonalizable.
- (d) **(0.75 Puntos)** Halla una base de cada uno de los subespacios propios de F .

3. Consideramos la función

$$f(x) = x^2 e^{-ax}$$

Se pide:

(a) **(0.5 Puntos)** Para $a = \frac{1}{100}$ halla

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

(b) **(0.5 Puntos)** Para $a = 2$ tomando

$$g(x) = \frac{f(x)}{x(2+x^2)}$$

halla

$$g'(0)$$

(c) **(0.5 Puntos)** Para $a = -9$ halla

$$\int_0^1 f\left(\frac{x}{3}\right) dx$$

4. Responde a las siguientes preguntas relativas a ecuaciones diferenciales:

(a) **(1 Punto)** Resuelve el siguiente problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y' = 3y - e^{5x} + \sin 2x \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(b) **(0.5 Puntos)** Resuelve la siguiente ecuación diferencial

$$9x^2 - y \sin x + \left(\frac{1}{y^2} + \cos x\right)y' = 3$$

(c) **(1 Punto)** Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y'_1 = y_1 + y_2 \\ y'_2 = y_1 + y_2 - x^2 + 1 \end{cases}$$

5. **(1 Punto)** Consideremos la función

$$G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

definida por

$$G(x, y, z) = (\arcsin(x^2 y^3 z^4), 2x + 3y + 4z, 2^x + 3^y + 4^z)$$

y los puntos del espacio

$$P = (2, 0, 0), P' = (0, 3, 0), P'' = (0, 0, 4).$$

Se pide hallar

$$\frac{\partial G}{\partial x}(P), \frac{\partial G}{\partial y}(P') \text{ y } \frac{\partial G}{\partial z}(P'')$$

6. **(1 Punto)** Se supone que en la ecuación

$$x^2 - y^2 + 4xye^{x+y} = -4$$

x es función implícita de y en un entorno del punto $x = -1, y = 1$. Halla el polinomio de Taylor de orden 1 de la función $x(y)$ en el punto $y = 1$.