

Observaciones:

- 1) Situar el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
- 2) Escribir nombre y apellidos en todas las hojas. Escribir también el D.N.I. en la primera de ellas.
- 3) Escribir con bolígrafo (o similar) azul o negro. NUNCA a lápiz.
- 4) La duración del examen será de 3 horas y media.

1. Contestar a las siguientes cuestiones:

- (a) **(0.5 Puntos)** ¿Es cierto que la unión de dos subespacios es también un subespacio? Justificar la respuesta.
- (b) **(0.25 Puntos)** Calcular $\int_0^{+\infty} x \cdot e^{1-x^2} dx$
- (c) **(0.5 Puntos)** Hallar respecto de producto escalar canónico, una base ortonormal del subespacio de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x + y - z = 0$

2. Se considera el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$, cuya matriz asociada en la base canónica es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) **(0.5 Puntos)** Hallar $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$
- (b) **(1 Punto)** Hallar la matriz de f en la base de $\mathbb{R}^3$, $B = \{u_1(1, 0, 1), u_2(0, 1, 1), u_3(1, 1, 1)\}$

- (a) **(0.75 Puntos)** Se considera la matriz $M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \beta \\ 3 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Estudiar para qué valores de los parámetros α y β es la matriz M diagonalizable.

- (b) **(1 Punto)** Calcular $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$

3. Consideramos la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(a) **(0.5 Puntos)** Estudiar si f es diferenciable en $(0, 0)$

(b) **(0.5 Puntos)** Hallar la derivada direccional $D_u f(0, 0)$ siendo el vector $u(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

4. **(0.75 Puntos)** Hallar el máximo y el mínimo absolutos de la función

$$f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$$

en el recinto compacto de $\mathbb{R}^2$

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}$$

(a) **(0.5 Puntos)** Demuestra que la ecuación $2x^2 + y^3z + 2yz^2 - z = 0$, permite definir a z como función implícita de (x, y) en un entorno de $(1, 0, 2)$.

(b) **(0.75 Puntos)** Halla el polinomio de Taylor de orden 2 de z en el punto $(1, 0)$.

(a) **(1 Puntos)** Resolver la ecuación diferencial $2x^2 + xy + 2x + y + (x^2 + x)y' = 0$, sabiendo que admite un factor integrante que solamente depende de x .

(b) **(0.5 Puntos)** Resolver la ecuación diferencial $y'' + y = 5.e^{2x}$