Universidad Politécnica de Cartagena
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial
Examen de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
I.T.I. en Mecánica

Examen final, 1 de Septiembre de 2011

Observaciones:
1) Sitúa el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
2) Pon nombre, apellidos y grupo en todas las hojas, y el D.N.I. en la primera de ellas.
3) Escribe con bolígrafo (o similar) azul o negro. NUNCA a lápiz.
4) La duración del examen será de 3 horas y media.

1. **(0.5 puntos cada una)** Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

   (a) Si dos vectores no nulos son linealmente dependientes entonces el subespacio que generan tiene dimensión 1.

   (b) Si un subespacio de $\mathbb{R}^4$ tiene 3 ecuaciones implícitas, entonces su dimensión es 1.

   (c) Una matriz cuadrada de tamaño 3×3 con 3 valores propios que no son todos distintos no es diagonalizable.

   (d) El desarrollo de Taylor en $a = 0$ de cierta función $f(x)$ es

   $$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots\dots\dots$$

   Halla las derivadas $f^{V}(0)$ y $f^{VI}(0)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya expresión analítica es

   $$f(x, y, z) = (x + y, x - y, x + y)$$

   (a) **(0.5 puntos)** Halla la matriz de f respecto de la base canónica.

   (b) **(1.25 puntos)** Determina bases del núcleo y de la imagen de f y estudia la inyectividad y suprayectividad de la aplicación.

   (c) **(1.25 puntos)** Halla la matriz de f respecto de las siguientes bases

   $$\begin{aligned} B &= \{(1, 2, 0), (2, -1, 0), (0, 0, 1)\} \\ B' &= \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\} \end{aligned}$$

3. Consideremos la matriz

   $$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) **(0.5 puntos)** Calcula a y b para que el vector $(0, 1, -1)$ sea un vector propio de M.

(b) **(2 puntos)** Para $a = 2, b = 3$ demuestra que la matriz M es diagonalizable, hallando una matriz diagonal y una matriz de paso asociadas.

4. **(2.5 puntos)** Utilizando el desarrollo de Taylor del grado adecuado de la función e^x en el punto $a = 0$ calcula $\sqrt[6]{e}$ con un error inferior a 10^{-4}.

5. **(1.75 puntos)** Calcula la integral

$$\int_0^{\pi} senx \cdot \cos^4 xdxdx$$

6. **(2 puntos)** Calcula la integral

$$\int_{-1}^{0} \frac{3x-4}{x^2-3x+2}dx$$

7. **(2.25 puntos)** Dada la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (xyz^2 \sin z - \sqrt{y}, x^2)$$

calcula la matriz jacobiana en todo punto, y, en particular, en el punto $(2, 1, \pi)$. Igualmente calcula la expresión de la diferencial de f en todo punto, y, en particular, en el punto $(2, 1, \pi)$

8. **(1 punto)** La ecuación

$$z^3 + xz + y = 0$$

define a z como función de (x, y) en un entorno del punto $(1, -2, 1)$. Hallar las derivadas parciales de $z(x, y)$ en el punto $(1, -2)$.

9. **(1 punto)** Resuelve la siguiente ecuación diferencial

$$x^3 - \cos y - xy^2 + (x \sin y - yx^2)y' = 0$$

10. **(0.5 puntos cada una)** Escribe, sin calcular los coeficientes, cómo sería la expresión de una solución particular de cada una de las siguientes ecuaciones lineales con coeficientes constantes:

(a) $-y'' + 4y' = 3e^{-4x}$

(b) $-y'' + 4y' = 2e^{4x}$

(c) $-y'' + 4y' = 5\cos(5x)$

(d) $-y'' + 4y' = -x^2 + 8$