



Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica, turno de mañanas)
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Examen final (12 de Septiembre de 2006)

Observaciones:

- 1) Sitúa el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
- 2) Escribe nombre, apellidos y grupo en todas las hojas. Pon también el DNI en la primera de ellas.
- 3) No se entregará ninguna parte del examen a lápiz. Se escribirá con bolígrafo (o similar) azul o negro.
- 4) La duración del examen será de 3 horas y media.
- 5) No podrá usarse calculadora.

1. Consideremos los vectores $u = (1, -1, 3)$ y $v = (2, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ y tomemos el subespacio generado por ellos $S = \langle u, v \rangle$.
 - (a) **(0.75 puntos)** Calcula unas ecuaciones implícitas para S y $\dim S$.
 - (b) **(0.5 puntos)** Halla un vector w de S^\perp .
 - (c) **(0.25 puntos)** Con el vector hallado en el apartado anterior, se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que cumple que $f(u) = (1, 1, 1, 1)$, $f(v) = 0$ y $f(w) = (1, -1, 0, 0)$. Determina una base de $\text{Im } f$.
 - (d) **(0.75 puntos)** Obtén la matriz A de la aplicación lineal respecto de las bases canónicas.
 - (e) **(0.25 puntos)** ¿Tendrá valores propios la matriz A ? Razona la respuesta.
2. **(0.75 puntos)** Determina el polinomio de Taylor de la función $g(x) = \sin 2x - \cos(x^2)$ en el punto $x_0 = 0$, de grado 4.
3. Responde a las siguientes preguntas:
 - (a) **(0.25 puntos)** Explica el significado de primitiva de una función.

- (b) **(0.25 puntos)** Si una función tiene alguna primitiva, ¿es ésta única? Detalla la respuesta, indicando cuántas primitivas debe tener.
- (c) **(0.25 puntos)** Cita algunos ejemplos de funciones que tengan primitiva, dando algunas de sus primitivas.
- (d) **(0.5 puntos)** Calcula una primitiva de la función $h(x) = \frac{1}{x^2-2x+1}$. Calcula la primitiva $H(x)$ que en $x_0 = 0$ toma el valor $H(x_0) = 2$.
4. Consideremos las funciones $f_1(x, y) = \frac{2}{x-y}$, $f_2(x, y) = 2^{x^2y}$, $f_3(x, y) = y^2 \cos x$.

- (a) **(1.5 puntos)** Calcula las derivadas parciales de primer y segundo orden de las 3 funciones anteriores.

- (b) **(0.75 puntos)** Construimos la función $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$G(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)).$$

Halla la matriz jacobiana de G en el punto $(2, 0)$.

5. **(1 punto)** En la ecuación

$$\cos(x^2 - y)z - t^x + y = -1$$

se supone que la variable y es función implícita de las otras 3 variables en un entorno del punto $(1, 3, 0, 4)$. Determina las derivadas parciales de la función implícita y en el punto $(1, 0, 4)$.

6. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

- (a) **(0.75 puntos)** $y' + y \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$
- (b) **(0.5 puntos)** $y''' = e^{-2x}$