Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica, ambos turnos)
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Examen final (29 de Junio de 2010)

Observaciones:
1) Situar el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
2) Escribir nombre y apellidos en todas las hojas. Escribir también el D.N.I. en la primera de ellas.
3) Escribir con bolígrafo (o similar) azul o negro. NUNCA a lápiz.
4) La duración del examen será de 3 horas y media.

1. **(0.25 puntos cada apartado)** Responder razonadamente (justificando la respuesta) a las siguientes preguntas:

   (a) Si el determinante de una matriz M vale 3 entonces, ¿el determinante de la matriz opuesta $-M$ vale -3?

   (b) Hallar la derivada de la función

   $$F(x) = \frac{2 - \sin(3x)}{\sin(3x) - 2}$$

   y observar el resultado y coméntalo.

   (c) Obtener dos primitivas H_1 y H_2 de la función

   $$h(x) = e^{x-1}$$

   tales que $H_1 - H_2 = 4$.

   (d) Dar un ejemplo de dos sucesiones a_n y b_n, divergentes a $+\infty$, y tales que

   $$\lim(a_n - b_n) = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim \frac{a_n}{b_n} = 1$$

   (e) Explicar en qué consiste una ecuación diferencial en variables separables. Poner además un ejemplo.

   (f) Si una función de varias variables g tiene un punto crítico c (es decir, todas las derivadas parciales de g se anulan en c) entonces, ¿g alcanza en c un máximo o un mínimo relativo?

2. Para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

se pide:

   (a) **(0.75 puntos)** Hallar los valores propios y una base de cada subespacio propio.

   (b) **(0.75 puntos)** Comprobar si es o no diagonalizable y, en caso afirmativo, dar una matriz diagonal asociada y una de las dos matrices de paso correspondientes.

3. Consideremos el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de C, la base canónica de $\mathbb{R}^3$, es

$$\begin{pmatrix} b & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

   (a) **(0.75 puntos)** Determinar para qué valor de b se obtiene que f es biyectivo. Obtener para dicho valor una base de $\ker f$ y otra de $\operatorname{Im} f$.

   (b) **(0.5 puntos)** Para el valor $b = 3$ obtener la matriz

$$M_{B\to C}(f)$$

   donde la base B de $\mathbb{R}^3$ que se está considerando es

$$B = \{(2,1,3),(0,1,2),(0,0,4)\}.$$

4. **(1 punto)** Calcular la integral

$$\int_0^{\pi} (\sin^5 x + x\cos x - \tan\frac{x}{3})dx$$

5. **(0.5 puntos)** Resolver la ecuación diferencial

$$2xy^2 + 3x^2 + 2x^2yy' = 0$$

6. **(1 punto)** Resolver el siguiente problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = \cos x \\ y(0) = 1, y'(0) = -1 \end{cases}$$

7. **(1 punto)** Hallar los extremos absolutos (y los puntos donde se alcanzan) de la función

$$G(x,y) = x^2y + 2xy^2 + 2xy$$

   en el conjunto

$$\Omega = \{(x,y) : -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$$

8. Para la función

$$H(x,y) = (x-y)e^{x^2+y^2}$$

   se pide obtener:

   (a) **(0.5 puntos)** La derivada direccional $D_vH(1,-1)$, para el vector $v = (3,2)$.

   (b) **(0.75 puntos)** Su polinomio de Taylor de grado 2 en el origen.