Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica, ambos turnos)
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Examen final (29 de Junio de 2010)

Observaciones:

1) Situar el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.

2) Escribir nombre y apellidos en todas las hojas. Escribir también el D.N.I. en la primera de ellas.

3) Escribir con bolígrafo (o similar) azul o negro. NUNCA a lápiz.

4) La duración del examen será de 3 horas y media.

SEGUNDO PARCIAL

1. **(0.25 puntos cada apartado)** Responder razonadamente (justificando la respuesta) a las siguientes preguntas:

   (a) Dar un ejemplo de dos sucesiones a_n y b_n, divergentes a $+\infty$, y tales que
   $$\lim(a_n - b_n) = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim \frac{a_n}{b_n} = 1$$

   (b) Explicar en qué consiste una ecuación diferencial en variables separables. Poner además un ejemplo.

   (c) Dar un ejempo de una ecuación diferencial que tenga entre sus soluciones a las funciones e^{2x} y e^{-x}.

   (d) Si una función de dos variables es continua entonces es diferenciable.

   (e) ¿Cuántas derivadas parciales de segundo orden distintas tiene una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^2? (Se entiende que derivadas cruzadas como $f_{xy} = f_{yx}$ no son distintas, es decir, coinciden.)

   (f) Si una función de varias variables g tiene un punto crítico c (es decir, todas las derivadas parciales de g se anulan en c) entonces, ¿g alcanza en c un máximo o un mínimo relativo?

2. Tomamos la sucesión
   $$a_n = \frac{3+n}{8+n^2}$$

   (a) **(0.5 puntos)** Determinar si $\lim a_n$ es finito o infinito y determinar su valor.

(b) **(0.5 puntos)** Deducir si la serie $\sum a_n$ es convergente o divergente.

3. **(0.5 puntos)** Resolver la ecuación diferencial

$$2xy^2 + 3x^2 + 2x^2yy' = 0$$

4. **(1 punto)** Resolver el siguiente problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = \cos x \\ y(0) = 1, y'(0) = -1 \end{cases}$$

5. **(1.25 puntos)** Dada la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (\log[-xy]e^{z-y}, 3 - \sin[ze^{x^2y}])$$

hallar la matriz jacobiana en todo punto posible y en particular en el punto $Q = (-1, 1, 0)$. Hallar la expresión analítica de dicha función en tal punto.

6. **(1 punto)** Hallar los extremos absolutos (y los puntos donde se alcanzan) de la función

$$G(x, y) = x^2y + 2xy^2 + 2xy$$

en el conjunto

$$\Omega = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

7. Para la función

$$H(x, y) = (x - y)e^{x^2+y^2}$$

se pide obtener:

(a) **(0.5 puntos)** La derivada direccional $D_vH(1, -1)$, para el vector $v = (3, 2)$.

(b) **(0.75 puntos)** Su polinomio de Taylor de grado 2 en el origen.

8. **(1.5 puntos)** Se supone que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases}$$

define en un entorno del punto $P = (0, 0, 3)$ a z e y como funciones implícitas de x. Hallar las derivadas parciales primeras y segundas de estas funciones implícitas en $x = 0$.