Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería. ITI. Mecánica. Grupo de mañana.
Examen final. Curso 2008- 2009.
1 de Julio de 2009

EXAMEN FINAL

Observaciones: 1) La duración del examen será de 3 horas y media. 2) Escribir nombre y apellidos en todas las hojas. Escribir también el D.N.I. en la primera de ellas. 3) Escribir con bolígrafo azul o negro (nunca a lápiz).

1.- Indicar si las siguientes afrimaciones son verdaderas o falsas justificando las respuestas:
a) **(0.25 Ptos.)** Para toda función continua $f(x)$ se tiene que

$$\int f(x)^2 dx = \left[\int f(x)dx\right]^2$$

b) **(0.25 Ptos.)** En un producto escalar si u y v son dos vectores que cumplen $u \cdot v = 0$ entonces alguno de los dos es nulo.
c) **(0.25 Ptos.)** Existen matrices cuadradas no nulas de orden n, cuyo cuadrado es la matriz nula.

2.- Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (x - y + z, 2x + y + z)$$

a) **(0.25 Ptos.)** Hallar la matriz de f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^2$.
b) **(0.5 Ptos.)** Hallar $\ker f$, una base de $\operatorname{Im} f$ y decir las propiedades de f.
c) **(0.75 Ptos.)** Se consideran las bases

$$\begin{aligned} B_3 &= \{u_1(1,0,0), u_2(1,1,0), u_3(1,1,1)\} \text{ de } \mathbb{R}^3 \\ B_2 &= \{v_1(1,1), v_2(0,1)\} \text{ de } \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Hallar la matriz

$$M_{B_3 \to B_2}(f)$$

3.- a) **(0.75 Ptos.)** Calcular:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x - \sin x}{x^2 \arctan x}\right)$$

b) **(0.75 Ptos.)** Calcular $\int_{-1}^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$

4.- Para la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{2x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

se pide, para cada punto de $\mathbb{R}^2$:
a) **(0.5 Ptos.)** Estudiar la continuidad.
b) **(0.5 Ptos.)** Obtener las derivadas parciales.
c) **(0.5 Ptos.)** Determinar si la función es diferenciable.

5.- (0.75 Puntos) Hallar el polinomio de Taylor de segundo grado en el origen, de la función $f(x,y) = e^{\sin(xe^y)}$

6.- Resolver:
a) **(1 Pto.)** La ecuación diferencial

$$x^2 + y^2 + 7xyy' = 0$$

Indicacion: Realizar el cambio (en la variable dependiente)

$$y = ux$$

b) **(1 Pto.)** El problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y''' - 2y'' - y' + 2y = -6e^{-2x} \\ y(0) = \frac{7}{2},\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 7 \end{cases}$$

7.- (1 Pto.) En la ecuación

$$xye^z + z\cos(x^2 + y^2) = 0$$

se supone que z es función implícita de x e y en un entorno de $(0,0,0)$. Hallar:
a) Las derivadas parciales primeras de z en $(0,0)$.
b) La derivada parcial segunda $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ en $(0,0)$.