



Departamento
de Matemática
Aplicada y
Estadística

Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica, turno de mañana)
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Examen final (24 de Junio de 2008)

Observaciones:

- 1) Situar el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
- 2) Escribir nombre y apellidos en todas las hojas. Escribir también el D.N.I. en la primera de ellas.
- 3) Escribir con bolígrafo (o similar) azul o negro. NUNCA a lápiz.
- 4) La duración del examen será de 3 horas y media.

1. Se considera el endomorfismo f de \mathbb{R}^4 cuya matriz asociada en la base canónica es

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) **(0.25 Puntos)** Hallar la expresión analítica de f .
- (b) **(1 Punto)** Determinar si f es o no diagonalizable, hallando una base de cada uno de sus subespacios propios.

2. **(1.5 Puntos)** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - y = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\log t}{t - \sqrt{t}} \\ 3x + 2y = g'(0) \end{cases}$$

donde la función g está definida del siguiente modo

$$g(t) = \frac{t}{\cos t}$$

3. Contestar a los siguientes apartados relacionados con integrales:

(a) **(0.5 Puntos)** Calcular la siguiente integral indefinida

$$\int x \log(x+2) dx$$

(b) **(0.5 Puntos)** Calcular la integral impropia

$$\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x}$$

(c) **(0.75 Puntos)** Hallar el área del recinto limitado por la recta $y = 1$ y la circunferencia de centro $(1, 0)$ y radio 2, con $y \geq 1$.

Nota: La ecuación de la circunferencia es

$$(x-1)^2 + y^2 = 4.$$

4. Consideremos la función

$$F(x, y) = \frac{x - y + 5}{3x + 2y}$$

(a) **(0.5 Puntos)** Hallar los límites iterados de F en el punto $(-2, 3)$.

(b) **(0.5 Puntos)** Hallar los límites direccionales de F en el punto $(-2, 3)$.

(c) **(0.25 Puntos)** ¿Qué sucede con el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,3)} F(x, y)$? ¿Por qué?

5. **(1 Punto)** Dado $P = (2, e, 0) \in \mathbb{R}^3$ y dada la función $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$G(x, y, z) = (\log[y - 4xz], e^{x-z-2}, \cos[ze^{x^2y}] - 5, 3)$$

hallar la matriz jacobiana de G en todo punto posible y en particular en P .

6. En la ecuación

$$z^3 - x^3 - xye^z = 2,$$

y considerando a z como función implícita de x e y (a la que denominaremos $\varphi(x, y)$) en un entorno del punto $(-1, 0, 1)$, calcular:

(a) **(0.5 Puntos)** Las derivadas parciales primeras de φ en el punto $(-1, 0)$.

(b) **(0.25 Puntos)** La ecuación del plano tangente a la superficie

$$z = \varphi(x, y)$$

en el punto $(-1, 0, 1)$.

7. **(1.5 Puntos)** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 5y_2 - \text{sen}(2x) \\ y_2' = y_1 - 2y_2 + x \end{cases}$$