

**Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica, turno de mañana)**  
**Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería**  
**Examen final (10 de Julio de 2007)**

**Observaciones:**

- 1) Situar el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
- 2) Escribir nombre y apellidos en todas las hojas. Escribir también el D.N.I. en la primera de ellas.
- 3) Escribir con bolígrafo (o similar) azul o negro. NUNCA a lápiz.
- 4) La duración del examen será de 3 horas y media.

1. Indicar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones, justificando las respuestas:

- (a) **(0.2 Puntos)** Toda matriz invertible es diagonalizable.
- (b) **(0.2 Puntos)** Si  $A$  es diagonalizable entonces  $A^n$  es diagonalizable para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- (c) **(0.2 Puntos)** Si  $A$  y  $B$  son diagonalizables, entonces  $A + B$  es diagonalizable.
- (d) **(0.2 Puntos)** Si  $A$  y  $B$  son diagonalizables, entonces  $AB$  es diagonalizable.
- (e) **(0.2 Puntos)** Si  $A$  es invertible, entonces  $AB$  es semejante a  $BA$  para cualquier matriz cuadrada  $B$ .

**Indicación:** En algunos apartados pueden servir de contraejemplo matrices  $2 \times 2$ .

2. Se considera el endomorfismo  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  definido por

$$f(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x + y - z, -x + y + 2z)$$

- (a) **(0.5 Puntos)** Hallar su matriz respecto de la base canónica.
- (b) **(1 Punto)** Hallar una base de los subespacios núcleo e imagen.
- (c) **(0.25 Puntos)** Decir si  $f$  es o no biyectiva.

3. Contestar a los siguientes apartados:

- (a) **(0.5 Puntos)** Calcular  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 1)^{\cot(x-1)}$

**Nota:**  $\cot$  es la función cotangente.

- (b) **(0.75 Puntos)** Hallar una cota del error cometido al escribir

$$\sqrt[5]{1.5} = 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{50}$$

**Indicación:** Utilizar el desarrollo de Taylor de grado 2 de la función  $\sqrt[5]{x}$  en el punto  $x_0 = 1$  evaluando el polinomio en el valor  $x = 1.5$ .

(c) **(0.5 Puntos)** Calcular  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$

4. Responder a las siguientes preguntas:

(a) **(0.5 Puntos)** Calcular (si es posible), en el origen, tanto los límites iterados como el límite de la función

$$f(x, y) = \frac{x^4 + 2y^3}{x^4 + 2y^2}$$

(b) **(0.5 Puntos)** Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie

$$z = f(x, y)$$

en el punto  $(0, -1)$ .

(c) **(0.5 Puntos)** Calcular (si es posible), en el origen, tanto los límites iterados como el límite de la función

$$g(x, y) = \text{sen}(2xy) - \log(e - x^2).$$

5. Dado  $P = (2, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$  y dada la función  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$h(x, y, z) = (\log[-xyz + 1]e^{x-y}, 3 - \text{sen}[ze^{x^2y}])$$

se pide:

(a) **(0.75 Puntos)** Hallar la matriz jacobiana de  $h$  en todo punto posible y en particular en  $P$ .

(b) **(0.75 Puntos)** Calcular la diferencial de  $h$  en todo punto posible y en particular en  $P$ .

6. Responde a las siguientes preguntas:

(a) **(0.75 Puntos)** Resolver la ecuación diferencial

$$\cos x + (y + \text{sen}x + \text{sen}y)y' = 0$$

sabiendo que admite como factor integrante a la función  $e^y$ .

(b) **(0.75 Puntos)** Resolver el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y''' + y' = e^x - \text{sen}2x \\ y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 0 \end{cases}$$