Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica, turno de mañanas)
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Primer parcial del examen final (3 de Julio de 2006)

Observaciones:

1) Situar el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
2) Escribir nombre y apellidos en todas las hojas. Escribir también el D.N.I. en la primera de ellas.
3) Escribir con bolígrafo (o similar) azul o negro. NUNCA a lápiz.
4) La duración del examen será de 3 horas y media.
5) No podrá usarse calculadora.

1. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ verificando: $f(e_1 - e_2) = 0$, $f(e_1 + e_2 + e_3) = 4e_2 + 5e_3$, $f(e_2 + e_3) = 3e_2 + 3e_3$, siendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Hallar:
   (a) **(1 punto)** La matriz de f respecto de la base canónica.
   (b) **(1 punto)** El núcleo y la imagen de f , y la dimensión y una base de cada uno de ellos.

2. **(2 puntos)** Expresa el concepto de matriz diagonalizable. Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
   estudia si A es diagonalizable, hallando en el caso de que lo sea, una matriz diagonal semejante y una matriz de paso.

3. Responde a las siguientes preguntas:
   (a) **(0.75 puntos)** Calcula $\lim_{x \to 0} \frac{sen^2 x - x^2}{6e^x - 6 - 6x - 3x^2 - x^3}$
   (b) **(0.75 puntos)** Calcula $\int \frac{\log x}{(x+1)^2} dx$

4. **(0.75 puntos)** Indica razonadamente cuales de los siguientes son productos escalares en $\mathbb{R}^3$, y cuando lo sean, halla una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada a partir de la base canónica:

   (a) $(x, y, z) \cdot (x', y', z') = xx' + yy' - zz'$

   (b) $(x, y, z) \cdot (x', y', z') = xx' + 2yy' + 3zz'$

5. **(0.75 puntos)** Halla el polinomio de Taylor de grado 3 de la función $f(x) = \frac{1}{x+1}$ en el punto $x_0 = 1$.

6. **(1.5 puntos)** Calcula mediante una integral el área limitada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

7. **(0.5 puntos)** Calcula $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$