



Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica, turno de mañanas)
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Examen final (3 de Julio de 2006)

Observaciones:

- 1) Sitúa el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
- 2) Escribe nombre y apellidos en todas las hojas. Pon también el D.N.I. en la primera de ellas.
- 3) Escribe con bolígrafo (o similar) azul o negro. Nunca a lápiz.
- 4) La duración del examen será de 3 horas y media.
- 5) No podrá usarse calculadora.

1. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ verificando: $f(e_1 - e_2) = 0$, $f(e_1 + e_2 + e_3) = 4e_2 + 5e_3$, $f(e_2 + e_3) = 3e_2 + 3e_3$, siendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de \mathbb{R}^3 . Hallar:
 - (a) (0.75 puntos) La matriz de f respecto de la base canónica.
 - (b) (0.75 puntos) El núcleo y la imagen de f , y la dimensión y una base de cada uno de ellos.

2. (1.5 puntos) Expresa el concepto de matriz diagonalizable. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

estudia si A es diagonalizable, hallando en el caso de que lo sea, una matriz diagonal semejante y una matriz de paso.

3. Responde a las siguientes preguntas:

- (a) (0.75 puntos) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x - x^2}{6e^x - 6 - 6x - 3x^2 - x^3}$
- (b) (0.75 puntos) Calcula $\int \frac{\log x}{(x+1)^2} dx$

4. **(1.5 puntos)** Estudia la continuidad y las derivadas parciales en todo punto de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{2x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

5. **(1.5 puntos)** Utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar los puntos de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, que están a distancia máxima y mínima del punto $P = (1, 1, 1)$.
6. Responde a las siguientes preguntas:

- (a) **(0.75 puntos)** Por regla general, una ecuación diferencial, ¿suele tener una única solución o no? ¿Hay que añadir algo a la ecuación para que tenga solución única? En caso afirmativo, ¿qué? Justificar todas las respuestas y poner además ejemplos en los que se vea lo que ocurre.
- (b) **(0.75 puntos)** Resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales:

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = x \end{cases}$$

siendo $x(0) = 3, y(0) = 2$.