



Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica, turno de mañanas)
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Segundo parcial del examen final (3 de Julio de 2006)

Observaciones:

- 1) Situar el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
- 2) Escribir nombre y apellidos en todas las hojas. Escribir también el D.N.I. en la primera de ellas.
- 3) Escribir con bolígrafo (o similar) azul o negro. NUNCA a lápiz.
- 4) La duración del examen será de 3 horas y media.
- 5) No podrá usarse calculadora.

1. **(2 puntos)** Estudia la continuidad y las derivadas parciales en todo punto de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{2x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

2. **(1.5 puntos)** Utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar los puntos de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, que están a distancia máxima y mínima del punto $P = (1, 1, 1)$.

3. Responde a las siguientes preguntas:

- (a) **(1 punto)** Por regla general, una ecuación diferencial, ¿suele tener una única solución o no? ¿Hay que añadir algo a la ecuación para que tenga solución única? En caso afirmativo, ¿qué? Justificar todas las respuestas y poner además ejemplos en los que se vea lo que ocurre.
- (b) **(1 punto)** Resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales:

$$\begin{cases} x' &= 3x - 2y \\ y' &= x \end{cases}$$

siendo $x(0) = 3, y(0) = 2$.

4. **(0.5 puntos)** Halla el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 1} \right)^{-2n}$

5. **(1 punto)** Estudia la convergencia de las series $\sum_{n \geq 1} \frac{3}{n^2 5^n}$ y $\sum_{n \geq 1} \frac{n+5}{n^2+n}$
6. **(2 puntos)** En las ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y - \sin(u + v + w) &= 2 \\ x + y^3 + (u - 1)^2 &= 2 \\ y + v - w^2 &= 0 \end{cases}$$

se supone que las variables u, v, w son funciones implícitas de las variables (x, y) en un entorno del punto $(1, 0, 0, 0, 0)$. Halla las derivadas parciales de u, v, w respecto de x y de y en $(1, 0)$. Calcula asimismo la matriz jacobiana de la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y), w(x, y))$$

en el punto $(1, 0)$.