



**Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica, turno de mañana)**  
**Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería**  
**Examen final (20 de Junio de 2005)**

**Observaciones:**

- 1) Situar el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
- 2) Escribir nombre y apellidos en todas las hojas. Escribir también el D.N.I. en la primera de ellas.
- 3) Escribir con bolígrafo azul o negro (nunca a lápiz).
- 4) La duración del examen será de 3 horas y media.
- 5) No fumar en el aula.
- 6) No podrá usarse calculadora.

*PRIMER PARCIAL*

1. **(1.5 puntos)** Sea la aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$f(x, y, z) = (ax + y + z, x + ay + z, x + y + az).$$

Calcula  $a$  para que el  $\ker f$  tenga dimensión máxima. En este caso hallar una base del núcleo y otra de la imagen.

2. Sea  $P_2[x]$  el espacio vectorial real formado por los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual a dos. Estudia si los siguientes endomorfismos son diagonalizables utilizando para ello las matrices respectivas en la base  $\{1, x, x^2\}$ :
- (a) **(1 punto.)** Endomorfismo  $f$  que a cada polinomio hace corresponder su derivada.
  - (b) **(1 punto)** Endomorfismo  $g$  que a cada polinomio hace corresponder el producto de su derivada por  $x$ .
3. Sea  $V = P_2[x]$  el espacio vectorial formado por los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual a dos. Se considera la aplicación que va de  $V \times V$  en  $\mathbb{R}$ , definida por

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p'(x)q'(x)dx + p(0) \cdot q(0)$$

donde  $p'(x)$  y  $q'(x)$  representan las derivadas de  $p(x)$  y  $q(x)$ , respectivamente.

- (a) **(1 punto)** Comprueba que " $\cdot$ " es un producto escalar.

- (b) **(1 punto)** Halla a partir de la base canónica de  $V$ ,  $\{1, x, x^2\}$ , una base ortonormal de  $V$  respecto del producto escalar.

4. Responde a las siguientes preguntas:

- (a) **(1 punto)** Halla el polinomio de Taylor de grado 4 de la función  $f(x) = x \log x$  en el punto  $a = 1$ . Utilízalo para hallar el valor aproximado de  $\log 4$ , dejando indicado el resultado o en forma de fracción. **Nota:**  $\log$  denota el logaritmo neperiano.

- (b) **(0.5 puntos)** Calcula el límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - \cos x)^2}{\sin^2(2x)}$

5. Resuelve los siguientes problemas, mediante la integral correspondiente:

- (a) **(1.25 puntos)** Halla el área, situada en el primer cuadrante, del recinto limitado por el eje  $OY$  y las curvas  $y = \frac{2x^2}{1+x^2}$ ,  $y = \frac{3x+2}{x+3}$ .

- (b) **(0.75 puntos)** Calcula  $\int_0^{+\infty} \frac{6}{x^2+2x+2} dx$ .