Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica, turno de mañana)
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Examen final (20 de Junio de 2005)

Observaciones:

1) Situar el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.

2) Escribir nombre y apellidos en todas las hojas. Escribir también el D.N.I. en la primera de ellas.

3) Escribir con bolígrafo azul o negro (nunca a lápiz).

4) La duración del examen será de 3 horas y media.

5) No fumar en el aula.

6) No podrá usarse calculadora.

GLOBAL

1. **(1.5 puntos)** Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z) = (ax + y + z, x + ay + z, x + y + az).$$

   Calcula a para que el $\ker f$ tenga dimensión máxima. En este caso hallar una base del núcleo y otra de la imagen.

2. Sea $P_2[x]$ el espacio vectorial real formado por los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual a dos. Estudia si los siguientes endomorfismos son diagonalizables utilizando para ello las matrices respectivas en la base $\{1, x, x^2\}$:

   (a) **(0.75 puntos)** Endomorfismo f que a cada polinomio hace corresponder su derivada.

   (b) **(0.75 puntos)** Endomorfismo g que a cada polinomio hace corresponder el producto de su derivada por x.

3. Responde a las siguientes preguntas:

   (a) **(0.75 puntos)** Halla el polinomio de Taylor de grado 4 de la función $f(x) = x \log x$ en el punto $a = 1$. Utilízalo para hallar el valor aproximado de $\log 4$, dejando indicado el resultado o en forma de fracción. **Nota:** log denota el logaritmo neperiano.

   (b) **(0.75 puntos)** Hallar el área, situada en el primer cuadrante, del recinto limitado por el eje OY y las curvas $y = \frac{2x^2}{1+x^2}$, $y = \frac{3x+2}{x+3}$.

4. Responde a las siguientes preguntas:

   (a) **(0.75 puntos)** Calcula la suma de la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2+n}$

(b) **(0.75 puntos)** Estudia la continuidad y la existencia de derivadas parciales en $(0,0)$ de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+yx^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

5. **(0.75 puntos)** Consideremos las funciones $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por $u(x,y) = x\log(xy)$, $v(x,y) = e^x seny$ y $w(x,y) = u(x, v(x,y))$. Halla $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$.

6. Responde a las siguientes preguntas:

   (a) **(0.5 puntos)** Justifica que las ecuaciones: $\begin{cases} e^{x+u} - \cos(x+u+y+v) & = & 0 \\ sen(x+y+v) - u^2 + v & = & 0 \end{cases}$ definen a las variables u y v como funciones implícitas de las variables (x,y) en un entorno del punto $(0,0,0,0)$.

   (b) **(0.75 puntos)** Hallar asimismo las derivadas parciales de u y de v respecto de x y de y en $(0,0)$.

7. **(1 punto)** Resuelve la siguiente ecuación diferencial

$$x + y^2 - 2xyy' = 0,$$

sabiendo que admite un factor integrante que depende sólo de la variable x.