

Universidad Politécnica de Cartagena  
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial  
Examen de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería  
Ingeniería Técnica Industrial en Mecánica, ambos turnos  
Examen final, 14 de Junio de 2011

**Observaciones:**

- 1) Sitúa el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
- 2) Pon nombre, apellidos y grupo en todas las hojas, y el D.N.I. en la primera de ellas.
- 3) Escribe con bolígrafo (o similar) azul o negro. NUNCA a lápiz.
- 4) La duración del examen será de 3 horas y media.

1. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una aplicación lineal y consideremos la base de  $\mathbb{R}^3$

$$B = \{u_1 = (-1, 0, 1), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (0, -1, 0)\}.$$

Supongamos que

$$M_{B \rightarrow B}(f) = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde  $x \in \mathbb{R}$  cumple que  $f(u_1 + u_2) = (1, 0, 2)$ .

- (a) **(1 punto)** Demuestra que  $x = -1$ .
  - (b) **(2 puntos)** Calcula la matriz de  $f$  respecto de la base canónica de  $\mathbb{R}^3$  y su expresión analítica.
  - (c) **(1 punto)** Estudia la inyectividad y suprayectividad de  $f$ . Calcula bases del núcleo y de la imagen.
2. **(3 puntos)** Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Analiza si es diagonalizable y, en caso afirmativo, calcula una matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada.

3. **(3 puntos)** Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1) - \operatorname{sen}^2 x - x}{\operatorname{sen} x^2}$$

4. (2 puntos) Calcula la integral

$$\int_{-2}^{\sqrt{2}-2} \sqrt{4 - (x+2)^2} dx$$

5. (1 punto) Calcula la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx$$

6. (1 punto) Dada la función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y, z) = 2x^2yz + xy + yz^2$$

calcula la expresión analítica de la diferencial  $df(1, 1, -1)$  así como la derivada direccional  $D_{(1,-1,0)}f(1, 1, -1)$ .

7. (1.5 puntos) Aplicando los métodos estudiados en clase, calcula los extremos absolutos de la función

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-2)^2$$

en el recinto  $D$  limitado por las curvas

$$y = 4 - x^2$$

$$y = x$$

es decir

$$D = \{(x, y) : y \leq 4 - x^2, x \leq y - 2\}$$

8. (1.5 puntos) Calcular el polinomio de Taylor de grado 2 de la función

$$f(x, y) = e^{x+y^2}$$

en el punto  $(0, 0)$ .

9. (1 punto) Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y' - y = xy^2$$

**Nota:** Puede resultar de utilidad realizar el cambio  $y = z^{-1} = \frac{1}{z}$

10. (2 puntos) Resolver el siguiente problema de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} -y'' + 4y' = 75 \cos(3x) \\ y(0) = 5, y'(0) = 8 \end{cases}$$