Universidad Politécnica de Cartagena
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Examen de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Ingeniería Técnica Industrial en Mecánica, ambos turnos
Examen final, 18 de Enero de 2011

Observaciones:

1) Sitúa el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
2) Pon nombre, apellidos y grupo en todas las hojas, y el D.N.I. en la primera de ellas.
3) Escribe con bolígrafo (o similar) azul o negro. NUNCA a lápiz.
4) La duración del examen será de 3 horas y media.

1. **(0.5 puntos cada apartado)** Responde razonadamente (justificando la respuesta) a las siguientes preguntas:

   (a) Explica por qué es errónea la siguiente afirmación:
   El subespacio de $\mathbb{R}^3$
   $$S = \{(x, y, z)|x + 2y = 0, 3x - y + 3z = 2\}$$
   tiene dimensión 2.

   (b) Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal, $x, y \in V, x \neq y$, tales que $f(x) = f(y)$. Da un vector no nulo de $Ker f$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal y consideremos la base de $\mathbb{R}^3$
$$B = \{u_1 = (-1, 0, 1), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (0, 1, 0)\}.$$

Supongamos que

$$M_{C\to C} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & x \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde C es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $x \in \mathbb{R}$ cumple que $f(u_2 + u_3) = (5, 1, -2)$.

(a) **(0.5 puntos)** Demuestra que $x = 1$.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula la matriz de f respecto de la base B y su expresión analítica.

3. **(1 punto)** Determina el polilnomio de Taylor de grado 4 de la función $f(x) = cos(2x)$ en $a = 0$, y utilizálo para aproximar $\cos(0.2)$. Acota el error (obteniendo la menor posible de las cotas superiores del error cometido con tal aproximación utilizando la fórmula del error de Lagrange).

4. **(0.75 puntos)** Calcula la siguiente integral

$$\int \sin^4 x dx$$

5. **(0.5 puntos cada apartado)** Responde a las siguientes preguntas:

   (a) Halla el límite de la sucesión $\left(\frac{2n+1}{n}\right)^n$

   (b) Determina el carácter de la serie $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^n}$

6. **(1 punto)** Resolver la siguiente ecuación lineal con coeficientes constantes:

$$y''' + 2y'' + y' = 3 + x$$

7. **(0.75 puntos)** Resolver el siguiente problema de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y' - y = 2xe^x \\ y(1) = 3e \end{cases}$$

8. **(0.75 puntos)** Dada la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (\log[-xy]e^{z-y}, 3 - \sin[ze^{x^2 y}])$$

hallar la matriz jacobiana en todo punto posible y en particular en el punto $P = (-1, 1, 0)$.

9. **(1 punto)** Dadas las funciones

$F(x, y, z) = x^2 - y^2 - z$	$G(x, y, z) = \log(xy) + z$

y suponiendo que en el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

se tienen definidas z e y como funciones implícitas de x (a las que denominaremos $Y(x)$ y $Z(x)$) en un entorno de $(1, 1, 0)$, calcular $Y'(1)$, $Y''(1)$, $Z'(1)$ y $Z''(1)$.