Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica, turnos de mañana y tarde)
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Examen final (9 de Febrero de 2007)

Observaciones:

1) Situar el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.

2) Escribir nombre y apellidos en todas las hojas. Escribir también el D.N.I. en la primera de ellas.

3) Escribir con bolígrafo azul o negro (nunca a lápiz).

4) La duración del examen será de 3 horas y media.

1. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por $f(x,y,z) = (2x+z, -2y, x+2z)$:

   (a) **(1 punto)** Hallar la matriz M de f respecto de la base canónica C. Hallar también la matriz M' respecto de la base $C' = \{u_1(1,1,1), u_2(0,1,1), u_3(0,0,1)\}$.

   (b) **(1 punto)** Justificar que la matriz M es diagonalizable y hallar una matriz diagonal semejante D, y una matriz de paso P que sea ortogonal. ¿Es la matriz M' diagonalizable? Justificar la respuesta.

2. **(1 punto)** Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^3$, $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y + z = 0\}$, y $F = \{(\lambda, 2\lambda, -\lambda) \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Demuestra que $\mathbb{R}^3 = E \bigoplus F$.

3. Calcular las siguientes integrales:

   (a) **(1 punto)** $\int \frac{1+\ \cos x}{sen\ x} dx$ (Indicación: Descomponer la integral)

   (b) **(0.5 puntos)** $\int\limits_1^{+\infty} (x-1).e^{-x} dx$

   (c) **(0.25 puntos)** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

4. Estudia la convergencia de las series:

   (a) **(0.25 puntos)** $\sum\limits_{n\geq 1} \cos(1/n)$

   (b) **(0.25 puntos)** $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos(1/n)}{1+n^2}$

   (c) **(0.25 puntos)** $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{5^{n+1}(n+2)}{(n+1)!}$

5. **(1.25 puntos)** Estudia la continuidad y la diferenciabilidad en el punto $(0,0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

6. (a) **(0.5 puntos)** Enuncia condiciones suficientes para que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admita un extremo local en el punto (a, b).

   (b) **(0.75 puntos)** Utilizando las condiciones del apartado a), estudia los extremos locales de la función

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$$

7. **(1 punto)** Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x + y + t \\ y' & = & x - y \end{array} \right.$$