Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica, ambos turnos)
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Examen final (1 de Febrero de 2006)

Observaciones:

1) Situar el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.

2) Escribir nombre y apellidos en todas las hojas. Escribir también el D.N.I. en la primera de ellas.

3) Escribir con bolígrafo (o similar) azul o negro. NUNCA a lápiz.

4) La duración del examen será de 3 horas y media.

1. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada a la base canónica C de $\mathbb{R}^3$ es

$$M = \begin{pmatrix} 3 & a & 2 \\ 0 & b & 0 \\ -6 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Se pide:

   (a) **(1 punto)** Halla los valores de los parámetros a y b para que la matriz sea diagonalizable.

   (b) **(1 punto)** Para el caso $a = b = 1$ halla una matriz diagonal asociada D y una matriz P cumpliendo que $M = PDP^{-1}$.

   (c) **(1 punto)** Dada la base $B = \{(1,0,1),(0,1,0),(1,0,-1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y cuando $a = b = 0$, halla $M_{CB}(f)$.

2. Calcula las siguientes integrales:

   (a) **(0.75 puntos)** $\int_1^e x^3 \log x dx$.

   (b) **(1 punto)** $\int \frac{x-1}{x^3+x} dx$.

3. Responde a las siguientes preguntas:

   (a) **(0.25 puntos)** Calcula $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{3n+2} - \sqrt{2n+3})$.

   (b) Determina el carácter de las siguientes series numéricas:

      1. **(0.25 puntos)** $\sum_{n\geq 2} \frac{2n^3-2}{n^4-n}$

      2. **(0.25 puntos)** $\sum_{n\geq 0} \frac{3^n(n+4)}{n!}$

4. **(1 punto)** Indica en cuales de los siguientes casos se puede asegurar mediante el Teorema de Weierstrass que la función $f(x,y)$ alcanza en el conjunto K un máximo y un mínimo absolutos:

   (a) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$, $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$

   (b) $f(x,y) = 3x^2y - 5x^3$, $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$

   (c) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, y < 1\}$

   ¿Hay algún caso en que exista el máximo absoluto o el mínimo absoluto aunque no podamos utilizar el Teorema de Weierstrass?

5. **(0.75 puntos)** Estudiar la existencia del límite

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2 - y^3 - 2x + 1}{(x-1)^2 + y^2}$$

6. **(1 punto)** Para la función $f(x,y) = sen(x+y) + \cos(x-y)$ halla los extremos relativos que pertenecen al abierto $]0, \frac{\pi}{2}[\times]0, \frac{\pi}{2}[$.

7. **(1.25 puntos)** Resuelve el siguiente problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = x^2 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$