Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica, turno de mañana)
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Examen final de Febrero (8 de Febrero de 2005)

Observaciones:
1) Situar el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
2) Escribir nombre y apellidos en todas las hojas. Escribir también el D.N.I. en la primera de ellas.
3) Escribir con bolígrafo azul o negro (nunca a lápiz).
4) No podrá usarse calculadora.
5) La duración del examen será de 3 horas y media.
6) No fumar.

1. Responder a las siguientes cuestiones:

   (a) (**0.25 puntos**) Demostrar que si $f : V \to W$ es una aplicación lineal y $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es un sistema de vectores linealmente dependientes entonces $\{f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)\}$ es también un sistema de vectores linealmente dependientes.

   (b) (**0.5 puntos**) Poner ejemplos de matrices de tamaño 2×2 con coeficientes reales, una que sea diagonalizable y otra que no lo sea.

   (c) (**0.5 puntos**) Sea f una función que tiene derivadas de todos los órdenes en cualquier punto. Determinar el valor de $f'''(0)$ sabiendo que su polinomio de Taylor de grado 4 en el punto $a = 0$ es $p(x) = 1 + 4x^2 - 5x^3 + x^4$.

2. Una base del núcleo de un endomorfismo f de $\mathbb{R}^4$ está formada por los vectores $(1, 1, 1, 1)$, $(0, 1, 1, 1)$, $(0, 0, 1, 1)$, y la imagen del vector $(0, 0, 0, 1)$ es el vector $(1, 2, 3, 4)$.

   (a) **(0.5 puntos)** Hallar la matriz de f en la base canónica $C = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathbb{R}^4$.

   (b) **(0.75 puntos)** Hallar la matriz de f en la base

   $$B = \{e_1, e_1 - e_2, e_1 - e_2 - e_3, e_1 - e_2 - e_3 - e_4\}.$$

3. Consideremos el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^3$:

   $$U = \{(x, y, z) : 2x + y - z = 0\}.$$

   (a) (**0.75 puntos**) Calcular una base de U y otra de $U^\perp$.

   (b) (**0.75 puntos**) Calcular las proyecciones ortogonales del vector $(5, 0, -2)$ tanto sobre U como sobre $U^\perp$.

4. (**1 punto**) Estudiar si es convergente la siguiente integral, y hallar su valor, en caso afirmativo:

$$\int_0^1 \log x dx.$$

5. Se considera la ecuación $x + 2y + 2u + e^u = 1$.

   a) **(0.5 puntos)** Demuestra que dicha ecuación define implícitamente una función $u = \varphi(x, y)$ en un cierto entorno del punto $P_0 = (0, 0, 0)$.

   b) **(0.5 puntos)** Halla la expresión analítica de la diferencial $D\varphi(0, 0)$

   c) **(0.5 puntos)** Halla la derivada direccional $D_v\varphi(0, 0)$, siendo v el vector $(1, 1)$.

6. (**1 punto**) Calcular la integral doble de la función

$$\frac{\cos x}{(y + senx)^2}$$

   en el recinto $[0, \frac{\pi}{2}] \times [1, 2]$.

7. (**1.5 puntos**) Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y^{IV} - y = 8e^x.$$