Departamento
de Matemática
Aplicada y
Estadística

Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica, ambos turnos)
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Primer examen parcial (24 de Febrero de 2007)

Observaciones:

1) Sitúar el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
2) Poner nombre, apellidos y turno (mañana o tarde) en todas las hojas. Poner también el D.N.I. en la primera de ellas.
3) Escribir con bolígrafo (o similar) azul o negro. NUNCA a lápiz.
4) La duración del examen será de 3 horas y media.
5) No se podrá usar calculadora.
6) Al finalizar el examen se entregará, por un lado las hojas con su resolución, por otro el resto de folios (usados o no) y por otro la hoja del enunciado del examen, la cual podrá recogerse al final de éste u otro día en el despacho, o bien descargarse de la página web.
7) Las personas que tengan convalidada parcialmente la asignatura deben realizar la parte del examen correspondiente: Álgebra o Cálculo. El resto deben realizar el examen completo.

Álgebra

1. (**1 punto**) Determinar la suma y la intersección de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \text{ y } W = \{(t - s, 2t, 3t + s) : t, s \in \mathbb{R}\},$$

mediante una base y ecuaciones implícitas en ambos casos.

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to V$ una aplicación lineal tal que existen vectores $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ tales que $V =< f(u_1), f(u_2), f(u_3) >$.

   (a) (**0.5 puntos**) Justifica que f es suprayectiva.

   (b) (**0.25 puntos**) Si $\dim V = 3$, prueba que deben formar u_1, u_2, u_3 una base de $\mathbb{R}^3$.¿Deben constituir forzosamente dichos vectores una base de $\mathbb{R}^3$ en el caso en que $\dim V = 2$?

3. **(1.25 puntos)** Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que cumple que

$$M_{BC}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

donde las bases consideradas son $B = \{(1,0,1),(-1,1,-1),(1,-1,0)\}$ y C la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Hallar la expresión analítica de f, una base de la imagen de la aplicación y decir si f es o no biyectiva.

4. (**1 punto**) En $\mathbb{R}^4$, con el producto escalar euclídeo, calcular una base ortonormal del subespacio

$$S = < (1,2,-1,0),(1,0,-2,1) > .$$

Hacer lo mismo con el producto escalar siguiente:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)\cdot(y_1,y_2,y_3,y_4) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + 2x_4y_4.$$

5. **(2 puntos)** Estudiar si es diagonalizable la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ n & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

en función de los valores de los parámetros m y n, determinando una matriz diagonal asociada cuando sea posible. Para los valores $m = 2, n = 0$, hallar además una matriz de paso.

Cálculo

6. **(1.25 puntos)** Obtener el polinomio de Taylor de grado 2 de la función $\arctan x$ en el punto $x_0 = 0$. Determinar la expresión del resto correspondiente en el punto $x = 1$.

7. **(0.5 puntos)** Calcular $\int_0^{\pi^2} \cos\sqrt{x}dx$.

8. **(1.25 puntos)** Hallar el área del recinto plano limitado por las curvas de ecuaciones

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 1 \\ y &= \frac{12}{x^2} \end{aligned}$$

y el eje OX positivo.

Nota: Sólo hay un recinto cuya frontera esté limitada exclusivamente por ambas curvas y el eje OX positivo.