



Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica, ambos turnos)
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Primer examen parcial (25 de Febrero de 2006)

Observaciones:

- 1) Sitúa el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
- 2) Pon nombre, apellidos y turno (mañana o tarde) en todas las hojas. Pon también el D.N.I. en la primera de ellas.
- 3) Escribe con bolígrafo (o similar) azul o negro. NUNCA a lápiz.
- 4) La duración del examen será de 3 horas y media.
- 5) No se podrá usar calculadora.
- 6) Al finalizar el examen se entregará, por un lado las hojas con su resolución, por otro el resto de folios (usados o no) y por otro la hoja del enunciado del examen, la cual podrá recogerse al final de éste u otro día en el despacho, o bien descargarse de la página web.
- 7) Las personas que tengan convalidada parcialmente la asignatura deben realizar la parte del examen correspondiente: Álgebra o Cálculo. El resto deben realizar el examen completo.

Álgebra

1. Responde a las siguientes cuestiones:

- (a) **(0.25 puntos)** Da un ejemplo de una matriz cuadrada real que tenga todos sus valores propios en $\mathbb{R}$, pero que no sea diagonalizable.
- (b) **(0.25 puntos)** Justifica que el determinante de una matriz invertible es distinto de cero.
- (c) **(0.25 puntos)** Si u y v son dos vectores de un espacio euclídeo que tienen igual norma, justifica que $u + v$ y $u - v$ son ortogonales.

2. (a) **(1 punto)** Halla la matriz de un endomorfismo f de $V = \mathbb{R}^3$ en la base canónica, sabiendo que $u = (1, 1, 1)$ es vector propio de valor propio 3, y que

$$\ker f = \langle (1, -1, 0), (0, 1, -1) \rangle.$$

- (b) **(1.25 puntos)** Estudia si es diagonalizable la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

En el caso de que así sea, hallar una matriz diagonal semejante D y una matriz de paso P .

3. (a) **(1 punto)** Halla las condiciones que deben cumplir a, b y c para que la matriz:

$$G = \begin{pmatrix} 3 & a & 5 \\ 2 & 2 & -1 \\ b & -1 & c \end{pmatrix}$$

sea la matriz de un producto escalar en alguna base.

- (b) **(1 punto)** En $V = \mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, halla la proyección ortogonal del vector $u = (1, -1, 1, 2)$ sobre el subespacio

$$W = \langle (1, -1, 0, 1), (0, 1, -1, 0), (1, 1, 1, 1) \rangle.$$

Sugerencia: Utiliza la proyección ortogonal de u sobre $W^\perp$.

Cálculo

4. (a) **(1 punto)** Calcula

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \operatorname{sen} 3x)^{\cot 5x}$$

- (b) **(1.25 punto)** Obtén el polinomio de Taylor de grado 4 de la función $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ en el punto $x_0 = 0$.

5. Realiza las siguientes cuestiones:

- (a) **(1.25 punto)** Halla el área del menor recinto del plano limitado por la parábola de ecuación $y = x^2$ y la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 2$.
- (b) **(0.5 puntos)** Calcula

$$\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx$$