



Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica, turno de mañanas)
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Primer examen parcial (19 de Febrero de 2005)

Observaciones:

- 1) Situar el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
- 2) Escribir nombre y apellidos en todas las hojas. Escribir también el D.N.I. en la primera de ellas.
- 3) Escribir con bolígrafo azul o negro (nunca a lápiz).
- 4) No podrá usarse calculadora.
- 5) La duración del examen será de 3 horas y media.
- 6) No fumar.

1. (1 punto) Responder a las siguientes cuestiones:

- (a) Probar que todo sistema de vectores que contenga al vector nulo es ligado.
- (b) Poner un ejemplo de un sistema de ecuaciones lineales que sea compatible determinado y tenga más ecuaciones que incógnitas.
- (c) ¿Puede tener una matriz invertible todos los elementos de la diagonal principal nulos? Si la respuesta es afirmativa poner un ejemplo que lo muestre y si es falsa probarlo.
- (d) Definir el concepto de aplicación lineal entre espacios vectoriales.

2. Se consideran los subespacios de \mathbb{R}^4 , $E = \langle (-1, -2, 1, -2), (0, 1, 1, 2) \rangle$ y $F = \langle (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1) \rangle$.

- (a) (0.75 puntos) Hallar las ecuaciones implícitas de E y de F .
- (b) (0.75 puntos) Hallar una base y la dimensión de los subespacios $E + F$, y $E \cap F$.

3. Sea f el endomorfismo de \mathbb{R}^3 definido por: $f(x, y, z) = (x, x + 2y, x + y + z)$.

- (a) (0.5 puntos) Halla la matriz de f en la base canónica de \mathbb{R}^3 .
- (b) (0.5 puntos) Halla una base de \mathbb{R}^3 respecto de la cual la matriz asociada a f sea diagonal.
- (c) (0.75 puntos) Utiliza la base del apartado anterior para calcular A^n para cada número natural n mayor o igual que uno, donde A es la matriz calculada en el primer apartado.

4. Se considera el siguiente subespacio de \mathbb{R}^4 : $W = \langle (1, 2, 1, 0), (1, 2, 3, 1) \rangle$.

- (a) (0.5 puntos) Halla una base ortonormal de W .
- (b) (0.5 puntos) Halla una base ortonormal de W^\perp .
- (c) (0.25 puntos) Utilizando las bases de los apartados a) y b) halla una base ortonormal de \mathbb{R}^4 .

5. Responde a las siguientes preguntas:

(a) **(0.5 puntos)** Halla $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$

(b) **(0.5 puntos)** Halla el seno del ángulo de 36° con un error menor que 10^{-2} utilizando el desarrollo de Taylor de la función $\text{sen}(\pi x)$ en $a = 0$. (En el resultado se podrán dejar indicadas las operaciones).

6. Calcula las siguientes integrales impropias:

(a) **(0.5 puntos)** $\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} dx$. (Indicación: se puede realizar el cambio de variable $x = \frac{1}{t}$)

(b) **(0.5 puntos)** $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+8}$ (En el resultado se podrán dejar indicadas las operaciones).

7. **(1.5 puntos)** Dibuja el recinto del plano coordenado limitado por las curvas de ecuaciones: $x^2 + y^2 = 16$, $y = x^2 + 2x + 4$, y por la recta $x = 4$, y halla su área.