Departamento
de Matemática
Aplicada y
Estadística

Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica, ambos grupos)
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Primer parcial (20 de Febrero de 2010)

Observaciones:
1) Sitúa el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
2) Escribe nombre, apellidos y grupo (mañanas o tardes) en todas las hojas. Pon también el DNI en la primera de ellas.
3) Escribe con bolígrafo (o similar) azul o negro. Nunca a lápiz.
4) La duración del examen será de 3 horas y media.

1. Responde a las siguientes cuestiones:

   (a) **(0.25 puntos)** Deduce razonadamente para qué valores de β la siguiente matriz es invertible

   $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & \beta \end{pmatrix}$$

   (b) **(0.25 puntos)** ¿Pueden constituir los vectores $\{u_1, u_2, u_3\}$ un SG de $\mathbb{R}^3$? Explica razonadamente por qué sí o por qué no. En caso afirmativo da un ejemplo.

   (c) **(0.25 puntos)** Define cuándo una matriz cuadrada A es invertible. Da dos condiciones equivalentes a la definición anterior de que A es invertible.

   (d) **(0.25 puntos)** ¿Puede ser inyectiva una aplicación lineal $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$? ¿Por qué? Da un ejemplo en caso afirmativo.

2. Sean U y V los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ siguientes

   $$U =< (-2,-2,3,0), (-3,0,3,1), (0,-6,3,-2) > \qquad V \equiv \begin{cases} x+y-3z-t=0 \\ 3x+2z+3t=0 \end{cases}$$

   (a) **(1.25 puntos)** Calcula una base de cada uno de los siguientes 4 subespacios de $\mathbb{R}^4$: $U, V, U+V$ y $U \cap V$.

   (b) **(0.75 puntos)** Con el producto escalar canónico, halla la proyección ortogonal del vector $(0,5,2,2)$ sobre U.

3. Dada la aplicación lineal $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

   $$g(x,y,z) = (-x+y, 2y+4z, -\alpha z)$$

   donde α es un parámetro real. Se pide:

(a) **(0.25 puntos)** Halla M, la matriz asociada a g con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) **(0.75 puntos)** Determina el valor de α para el que g no es inyectiva. En tal caso da una base del núcleo de g y otra de la imagen de g.

(c) **(0.75 puntos)** Estudia en función del parámetro α cuándo la matriz M del apartado (a) es diagonalizable. Para el valor $\alpha = -3$ muestra una matriz diagonal semejante a M.

4. **(1 punto)** Dada la matriz

$$N = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

demuestra que es diagonalizable y obtén una matriz P que permite obtener su forma diagonal (P es lo que llamamos una matriz de paso asociada).

5. **(1 punto)** Hallar tanto el polinomio de Taylor como el resto (en su forma de Lagrange) de grado 3, tomando como centro el punto $x_0 = 0$, de la función

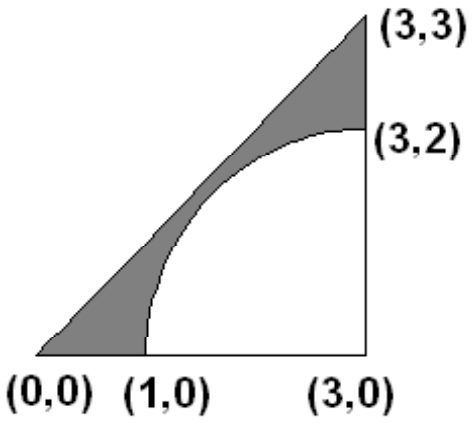
$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$$

6. Calcula las siguientes integrales

(a) **(0.75 puntos)** $\int \frac{3x+2}{x^3+x^2-2} dx$

(b) **(0.5 puntos)** $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{\log(x^5)}{x} dx$

7. **(1 punto)** Halla el área del recinto sombreado a continuación, usando integrales (no será válido el resultado si se halla sólo por métodos geométricos, los cuáles se permiten para comprobar que el resultado obtenido es correcto):



Nota: Por si no queda claro, los puntos $(0, 0)$ y $(3, 3)$ están unidos por una recta y los puntos $(1, 0)$ y $(3, 2)$ por un arco de circunferencia. Dicho arco es la cuarta parte de la circunferencia completa.