Departamento
de Matemática
Aplicada y
Estadística

Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica, ambos turnos)
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Examen final (2 de Febrero de 2009)

Observaciones:

1) Sitúa el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.

2) Escribe nombre, apellidos y grupo en todas las hojas. Pon también el DNI en la primera de ellas.

3) Escribe con bolígrafo (o similar) azul o negro. Nunca a lápiz.

4) La duración del examen será de 3 horas y media.

1. **(0.45 puntos)** Responde a las siguientes cuestiones:

   Dado un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V indica cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de V. Justifica la respuesta en todos los casos:

   (a) El conjunto formado por dos vectores distintos que sean LD.

   (b) El núcleo de un endomorfismo de V.

   (c) La unión de dos subespacios vectoriales de V.

2. Se considera la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por:

$$T(x, y, z, t) = (x - 2y + z, y + 3z - t, x - y + 4z - t, x + 7z - 2t)$$

   (a) **(0.7 puntos)** Obtén ecuaciones implícitas y base de $\ker T$. Clasifica la aplicación lineal.

   (b) **(0.8 puntos)** Con el producto escalar canónico de $\mathbb{R}^4$ halla una base ortonormal de $\operatorname{Im} T$.

3. **(1.3 puntos)** Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

   Calcula los valores propios de A, una base de cada subespacio propio suyo y demuestra que la matriz es diagonalizable.

4. Contesta a los siguientes apartados:

   (a) **(0.5 Puntos)** Calcula

$$\lim_{x \to 1} (2x^2 - 1)^{\cot(x-1)}$$

   Nota: *cot* es la función cotangente.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$$

5. **(0.5 puntos)** Consideremos $P \in \mathbb{R}^3$ y funciones diferenciables

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

tales que para $Q = g(P) \in \mathbb{R}^2$ se cumple que

$$D_1 g(P) = (0,1), D_2 g(P) = (1,2), D_3 g(P) = (3,-1), D_1 f(Q) = -2, D_2 f(Q) = 1$$

Calcula las derivadas parciales de $f \circ g$ en el punto P.

6. **(1 punto)** Halla el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(0,0)$ de la función:

$$f(x,y) = \sin(xy) + \cos(y-x)$$

7. **(1 punto)** Dada la ecuación

$$x + ze^{z+y} + \sin(z-y) = 1$$

en la que se supone que z es una función que depende de las variables x e y en un entorno del punto $(1,0,0)$, obtén las derivadas parciales de z en el punto $(1,0)$.

8. **(1 punto)** Resuelve la ecuación diferencial

$$x^2 + y - xy' = 0$$

sabiendo que admite un factor integrante $\mu = \mu(x)$, es decir, que sólo depende de x.

9. **(1 punto)** Halla la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{xy'}{x-1} = 2$$

que en $x = e$ tome el valor $2e$.