



Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica, ambos turnos)
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Examen final (15 de Febrero de 2008)

Observaciones:

- 1) Sitúa el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
- 2) Escribe nombre, apellidos y grupo en todas las hojas. Pon también el DNI en la primera de ellas.
- 3) Escribe con bolígrafo (o similar) azul o negro. Nunca a lápiz.
- 4) La duración del examen será de 3 horas y media.

1. Responder a las siguientes cuestiones:

- (a) **(0.75 Puntos)** Para una aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ decir cuándo es lineal. Dar un ejemplo de dos aplicaciones lineales del tipo anterior, una inyectiva y otra no. Para la segunda, además, el ejemplo debe cumplir que

$$\ker f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x - y = 0\}.$$

- (b) **(0.5 Puntos)** Para una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dar la definición de derivabilidad en un punto x_0 . Poner un ejemplo de una función derivable g tal que $g'(0) = 2$ y cuya derivada valga constantemente 3 en todo punto.
- (c) **(0.25 Puntos)** Calcula la suma de la siguiente serie

$$\sum_{n \geq 2} \frac{3}{4^{n+1}}$$

2. Se considera, en \mathbb{R}^3 , con el producto escalar euclídeo, el subespacio:

$$U = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle .$$

Se pide:

- (a) **(0.5 Puntos)** Obtener, utilizando el método de Gram-Schmidt, una base ortonormal de U .
- (b) **(0.5 Puntos)** Hallar una base del subespacio U^\perp .

3. (1 Punto) Para la matriz

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

se pide hallar los valores propios y subespacios propios, y deducir si es o no diagonalizable.

4. (1.25 Puntos) Hallar el área del recinto que está en el interior de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 4$$

y del polígono convexo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 0)$.

Nota: Dicho polígono es un trapecio rectángulo.

5. (1.25 Puntos) Para la función

$$f(x, y) = e^{2x+4y} + \cos[\text{sen}(2y + x)]$$

obtener su polinomio de Taylor de grado 2 en el punto $(-2, 1)$.

6. (1.5 Puntos) Estudiar los extremos relativos de la función

$$g(x, y) = x^2y + 2xy^2 + 2xy$$

en el abierto

$$M = \{(x, y) : -1 < x < 1, -1 < y < 1\}.$$

7. (1.5 Puntos) Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 - \text{sen}x \\ y_2' = y_1 - y_2 + e^{3x} \end{cases}$$