

Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica, turno de mañanas)
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Examen final (6 de Septiembre de 2003)

Observaciones:

- 1) La duración del examen será de 3 horas y media.
- 2) Escribe nombre y apellidos en todas las hojas. Escribe también la especialidad, el turno y el D.N.I. en la primera de ellas.
- 3) Escribe con bolígrafo azul o negro (nunca a lápiz).
- 4) Sitúa el D.N.I. u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
- 5) No fumar en el aula.
- 6) No podrá usarse calculadora.

1. Responde a las siguientes cuestiones teóricas:

(a) **(0.25 puntos)** ¿Puede tener una matriz invertible como valor propio al 0?

(b) **(0.25 puntos)** Sabiendo que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 4$ calcula el valor de

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{21} + 3a_{11} & -a_{22} + 3a_{12} & -a_{23} + 3a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, -x + y, x + y + 2z)$$

Se pide:

- (a) **(0.25 puntos)** Halla la matriz asociada a f respecto de la base canónica de \mathbb{R}^3 .
- (b) **(0.25 puntos)** Halla una base de $\ker f$.
- (c) **(0.25 puntos)** ¿Pertenece el vector $(8, 1, 5)$ a $\text{Im } f$?
- (d) **(0.5 puntos)** Calcula $\ker f \cap \text{Im } f$ y deducir si ambos subespacios están en suma directa.

3. **(1.25 puntos)** Justifica que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

admite una diagonalización ortogonal (mediante una matriz de paso ortogonal) hallando una base de \mathbb{R}^3 formada por vectores propios de la matriz y las matrices diagonal y de paso asociadas.

4. **(0.25 puntos)** Suma la siguiente serie:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

5. **(0.75 puntos)** Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{senhx} - \operatorname{sen}x + \frac{2}{3}x \cos x - \frac{2}{3}x}{x^5}$$

6. **(0.5 puntos)** Estudia el carácter de la integral $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ hallando el valor correspondiente si es convergente.

7. Consideremos las funciones

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y}{x^2 - y} \text{ y } g(x) = (x + 2, \cos(x^2)).$$

(a) **(0.25 puntos)** Halla el dominio y estudia la continuidad y la diferenciabilidad de f y de g .

(b) **(0.75 puntos)** Calcula $J(g \circ f)(1, 2)$, y $J(f \circ g)(0)$.

8. **(1.25 puntos)** Sea a un número no nulo. Comprueba que la ecuación $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ define a y como función implícita de x en un entorno del punto $(\sqrt[3]{2a}, \sqrt[3]{4a})$. Halla las derivadas primera y segunda de la función implícita $y(x)$ en el punto $x = \sqrt[3]{2a}$.

9. Responde a las siguientes preguntas relativas a ecuaciones diferenciales:

(a) **(0.75 puntos)** Resuelve la ecuación $e^{x+y} + \operatorname{sen}y + (e^{x+y} + x \cos y + 1)y' = 0$

(b) **(0.75 puntos)** Resuelve el sistema

$$\begin{cases} x' &= x - y \\ y' &= x + y \end{cases}$$

con las condiciones iniciales $x(0) = -1$, $y(0) = 1$.

10. **(0.75 puntos)** Calcula $\int_{\Omega} \int y dx dy$, siendo $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 8, y \geq 2\}$