Observaciones:

- 1) La duración del examen será de 3 horas y media.
- 2) Escribir nombre y apellidos en todas las hojas. Escribir también el D.N.I. en la primera de ellas.
- 4) Situar el D.N.I. u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
- 3) Escribir con bolígrafo azul o negro (nunca a lápiz).
- 4) No fumar.
- 5) No podrá usarse calculadora.
- 6) Los alumnos que tengan alguna convalidación parcial, por haber aprobado alguna asignatura relacionada, deberán tener en cuenta que los ejercicios de álgebra son 1.(a), 2 y 3, los de la parte de cálculo son 1.(b), 4, 5, 6 y 7 y el de ecuaciones diferenciales el 8.
- 7) Los alumnos que tengan la opción de realizar alguno de los dos parciales sólo realizarán (si finalmente optan por ello) los ejercicios que están delimitados en la parte correspondiente.
- 8) QUIENES DEBAN EXAMINARSE DE TODA LA ASIGNATURA DEBERÁN REALIZAR LOS EJERCICIOS 1, 2, 4, 5, 6 y 7.

Primer parcial

1. Responde a las siguientes cuestiones teóricas:
 - (a) **(0.5 puntos)** Demuestra que si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación lineal entre espacios vectoriales la imagen de una base de V es un sistema generador de $\text{Im } f$.
 - (b) **(0.5 puntos)** Define el concepto de función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y derivable en un punto a . Di si alguno de los conceptos implica el otro y, si alguna de las implicaciones no se cumple, pon algún ejemplo que lo muestre.
2. **(2 puntos)** Halla la matriz en la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que cumple las siguientes condiciones:
 - a) El núcleo de f está generado por $e_1 + e_2 - e_3$.
 - b) La imagen de $e_1 + e_2$ es $3e_2$.
 - c) El vector $e_1 - e_2$ pertenece a $f^{-1}(2e_1)$.Obtén la dimensión y una base de la imagen de f . Halla los valores propios y los subespacios propios de la matriz considerada inicialmente. ¿Es diagonalizable?
3. **(1.5 puntos)** En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, dado el subespacio
$$W : \begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ 2x + y - z + 3t = 0 \end{cases}$$
obtén una base de $W^\perp$ y una base ortogonal de $W \oplus \langle (1, 0, 0, 2) \rangle$.
4. **(1.5 puntos)** Halla el área del menor de los recintos limitados por las curvas de ecuaciones $y = x^2$, $x^2 + y^2 = 2$

Segundo parcial

5. **(0.5 puntos)** Da la fórmula del polinomio de Taylor de grado 2 de una función $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en el punto $(a, -3)$.

6. **(2 puntos)** Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange, halla el punto de la recta de ecuaciones:

$$\begin{aligned}2x - y + z - 1 &= 0 \\ x + y - 5 &= 0\end{aligned}$$

que está a distancia mínima del origen de coordenadas.

7. Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-2y}{x+y} & \text{si } x + y \neq 0 \\ x & \text{si } x + y = 0 \end{cases}$$

se pide:

(a) **(0.75 puntos)** Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de f en $(0, 0)$ y en $(1, -2)$.

(b) **(1.25 puntos)** Calcular el polinomio de Taylor de f de grado 2 en el punto $(1, -2)$.

8. **(1.5 puntos)** Resuelve la ecuación diferencial $(2x - y)dx + (x - 1)dy = 0$