

Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica, turno de mañanas)
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Examen final (30 de Enero de 2004)

Observaciones:

- 1) La duración del examen será de 3 horas y media.
- 2) Escribir nombre y apellidos en todas las hojas. Escribir también la especialidad, el turno y el D.N.I. en la primera de ellas.
- 3) Escribir con bolígrafo azul o negro (nunca a lápiz).
- 4) Situar el D.N.I. u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
- 5) No fumar en el aula.
- 6) No podrá usarse calculadora.
- 7) Los alumnos que tengan alguna convalidación parcial por haber aprobado alguna asignatura relacionada deberán tener en cuenta que los ejercicios de álgebra son el 1 y el 2, los de la parte de cálculo el 3, 4 y 5, y de ecuaciones diferenciales el 6.

1. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) **(1 punto)** Comprueba que es diagonalizable y halla una matriz diagonal semejante a A y una matriz de paso.
 - (b) **(0.25 puntos)** ¿Es esa matriz de paso ortogonal? ¿Esperabas que lo fuera?
 - (c) **(0.5 puntos)** Considerando A como matriz asociada de un endomorfismo f en $\mathbb{R}^3$ al tomar la base canónica, halla una base de $\text{Im } f$. Concluir si f es inyectivo y/o suprayectivo.
 - (d) **(0.75 puntos)** Siendo $B = \{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 1, -1)\}$ otra base de $\mathbb{R}^3$, halla $M_B(f)$.
2. Dentro del espacio vectorial euclídeo formado por las funciones reales continuas definidas en $[-\pi, \pi]$ y el producto escalar dado por

$$f \cdot g = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

se considera el subespacio $S = \langle \sin x, \cos x \rangle$.

- (a) **(0.5 puntos)** Obtén una base ortonormal de S .
 - (b) **(0.25 puntos)** Halla la proyección ortogonal sobre S del vector $2x$.
 - (c) **(0.25 puntos)** Enuncia todas las propiedades que conozcas de la norma asociada a un producto escalar.
3. Consideremos la función

$$f(x) = \frac{2}{3 - x^2}.$$

- (a) **(0.5 puntos)** Desarrollando alrededor del punto $a = 1$ halla el valor del polinomio de Taylor de grado 2 en $x = 0$.
- (b) **(0.25 puntos)** Acota el error cometido en dicha evaluación según el resto de Lagrange y compáralo con el error verdadero.

(c) **(0.25 puntos)** ¿Qué pasaría si se hubiera pedido realizar la misma operación en $x = 2$?

4. Consideremos la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^k}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{R}$. Estudiar en $(0, 0)$ para los valores de $k = 3$ y $k = 4$:

- (a) **(0.5 puntos)** Continuidad de f .
- (b) **(0.5 puntos)** Existencia de derivadas parciales de f .
- (c) **(0.5 puntos)** Diferenciabilidad de f .

5. Dada la función $F(x, y, z) = z^2 - 2yz + x - 1$ se pide:

- (a) **(0.5 puntos)** Estudiar cuando se puede aplicar el teorema de la función implícita a la ecuación $F(x, y, z) = 0$ en los puntos $P = (1, 1, 0)$ y $Q = (2, 1, 1)$ para definir z como función implícita de x e y .
- (b) **(1 punto)** Calcular $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 1)$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(2, 1)$ cuando sea posible.

6. Resolver:

- (a) **(0.75 puntos)** El problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} x^2 y' + 2xy = x \cos x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

- (b) **(0.75 puntos)** La siguiente ecuación diferencial

$$xy + y^2 + (x^2 - xy)y' = 0.$$

Indicación: Realizar el cambio $u = \frac{y}{x}$.