Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica, turno de mañanas)
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Examen final de septiembre (8 de Septiembre de 2004)

Observaciones:
1) La duración del examen será de 3 horas y media.
2) Escribir nombre y apellidos en todas las hojas. Escribir también el D.N.I. en la primera de ellas.
3) Escribir con bolígrafo azul o negro (nunca a lápiz).
4) No fumar.
5) No podrá usarse calculadora.

1. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumple las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & y_1 + y_2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 3y_1 - y_2 \\ x_1 + x_3 & = & y_1 \\ 0 & = & y_3 \end{array}$$

   donde $f(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$. Se pide:

   a)(**0.75 puntos**) Hallar la matriz A de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y estudiar si f es biyectiva.

   Nota: Si no se sabe cómo calcular la matriz tómese $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ para los dos siguientes apartados.

   b)(**0.75 puntos**) Hallar los subespacios $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$.

   c)(**0.5 puntos**) Hallar la matriz asociada a f respecto de la base $B = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$.

2. (**1 punto**) Suponiendo que estamos con el producto escalar canónico, calcular una base ortonormal del subespacio $N =< (1,0,0,-1), (2,-1,0,3) >$ de $\mathbb{R}^4$, así como dos vectores perpendiculares a N que no sean proporcionales entre sí.

3. Calcular en cada apartado lo que se pide:

   (a) (**0.5 puntos**) $\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{2n^2-7}{3n^2})^{6n-2}$.

   (b) (**0.5 puntos**) $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{2n+1}{3^{n+2}}$ (demostrando previamente la convergencia de la serie).

4. (**0.5 puntos**) Dada la función $f(x) = \cos x$, hallar su polinomio de Taylor de grado 2 en el punto $a = \pi$.

5. (**1.5 puntos**) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^8} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad de f, y la existencia de derivadas parciales y direccionales en todo punto.

6. Consideramos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} xy + uv - 4 &= 0 \\ x + y + u - v &= 4 \end{aligned}$$

Se pide:

a)(**0.5 puntos**) Demostrar que en un entorno del punto $(3, 1, 1, 1)$ dicho sistema define implícitamente a u y a v como funciones de x e y.

b)(**1 punto**) Hallar la matriz jacobiana de la función $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, en el punto $(3, 1)$.

7. (**0.75 puntos**) Sea Ω el recinto limitado por los semiejes coordenados positivos y la curva de ecuación

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1.$$

Calcular el área de dicho recinto.

8. (**0.75 puntos**) Resolver el siguiente problema de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 2 \end{cases}$$