

Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica, turno de mañanas)
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Segundo examen parcial (7 de Junio de 2003)

Observaciones:

- 1) La duración del examen será de 3 horas y media.
- 2) Escribir nombre y apellidos en todas las hojas. Escribir también el D.N.I. en la primera de ellas.
- 3) Escribir con bolígrafo azul o negro (nunca a lápiz).
- 4) Situar el D.N.I. u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
- 5) No fumar en el aula.
- 6) No podrá usarse calculadora.
- 7) Por motivos de convalidación parcial los alumnos que tengan la parte de Cálculo aprobada sólo tienen que hacer la parte de Ecuaciones diferenciales (ejercicios 7 y 8) y los que tengan la parte de Ecuaciones Diferenciales aprobada sólo tienen que hacer la parte de Cálculo (ejercicios 1, 2, 3, 4, 5 y 6). El resto de alumnos deberán hacer el examen completo.

Parte de Cálculo

1. **(1.25 puntos)** Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad en todos los puntos de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

2. **(0.5 puntos)** Consideremos funciones $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciables de modo que para cierto punto $P \in \mathbb{R}^2$ se cumple que $Jf(P) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $Jg(f(P)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Hallar $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(P)$.

3. Consideremos la ecuación $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$.
 - (a) **(0.5 puntos)** Probar que para cualquier función derivable $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene que la función $z(x, y) = x e^{h(\frac{y}{x})}$ es solución de la ecuación.
 - (b) **(0.5 puntos)** Realizar el cambio de coordenadas $u = x, v = \frac{y}{x}$ en la ecuación.
 - (c) **(0.25 puntos)** Utilizando el apartado anterior resolver la ecuación y probar que las funciones z del primer apartado son exactamente todas las soluciones de la ecuación.
4. **(1.5 puntos)** Hallar el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ con las condiciones $x^2 + y^2 - 1 = 0, x + y + z - 1 = 0$.
5. **(1.5 puntos)** Justificar que las ecuaciones

$$\begin{aligned} x - y - \operatorname{sen}(u + v + w) &= 1 \\ x + y^2 + (u - 1)^3 &= 0 \\ y + v - w^3 &= 0 \end{aligned}$$

definen a las variables u, v, w , como funciones implícitas de x, y , en un entorno del punto $(x, y, u, v, w) = (1, 0, 0, 0, 0)$. Calcular las derivadas parciales de u, v, w respecto de x e y en $(1, 0)$.

6. **(1 punto)** Calcula $\iint_{\Omega} \sqrt{x+y}$, siendo Ω el recinto limitado por la gráfica de la función $y = |x|$ y por la recta $y = 1$.

Parte de Ecuaciones Diferenciales

7. **(1.25 puntos)** Resuelve el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y''' - 2y'' - y' + 2y &= e^{-2x} \\ y(0) &= \frac{11}{12} \\ y'(0) &= \frac{1}{6} \\ y''(0) &= \frac{11}{3} \end{cases}$$

8. **(0.75 puntos)** Resuelve la ecuación $y' + \frac{y}{x} = \operatorname{sen} x$.