

Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica, turno de mañanas)
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Primer examen parcial (1 de Marzo de 2003)

Observaciones:

- 1) La duración del examen será de 3 horas y media.
- 2) Escribir nombre y apellidos en todas las hojas. Escribir también el D.N.I. en la primera de ellas.
- 3) Escribir con bolígrafo (o similar) azul o negro (nunca a lápiz).
- 4) Situar el D.N.I. u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
- 5) No fumar en el aula.
- 6) No podrá usarse calculadora.
- 7) Por motivos de convalidación parcial los alumnos que tengan la parte de Cálculo aprobada sólo tienen que hacer la parte de Álgebra (los ejercicios 1, 2, 3 y 4) y los que tengan la parte de Álgebra aprobada sólo tienen que hacer la parte de Cálculo (los ejercicios 5, 6, y 7). El resto de alumnos deberán hacer el examen completo.

Parte de Álgebra

1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera el siguiente subespacio

$$S = \langle (-1, 2, 0), (a, b, -1) \rangle.$$

- (a) **(0.75 puntos)** Demuestra que para todo a y para todo b se tiene que $B = \{(-1, 2, 0), (a, b, -1)\}$ es una base de S . Halla a y b para que el vector $v = (0, 5, -1)$ pertenezca a S y de modo que $v_B = (1, 1)$.
- (b) **(0.5 puntos)** Para $a = 1$ y $b = 0$ y dado $T = \langle (0, 2, -1), (-4, 4, 2) \rangle$ halla $\dim(S + T)$.

2. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ siguiente:

$$f(x, y, z) = (-2x - z, x + y - z, 3x + y).$$

- (a) **(0.75 puntos)** Calcula una base de $\ker f$ y una base de $\text{Im } f$.
- (b) **(0.25 puntos)** Determina si f es o no suprayectiva.
- (c) **(0.25 puntos)** Calcula $M_{BC}(f)$, donde

$$B = \{(1, -1, 0), (2, 3, 0), (1, -2, 3)\}.$$

3. Dentro del espacio vectorial $P_2[x]$ formado por los polinomios reales de grado menor o igual que 2, y en el que se ha definido el siguiente producto escalar:

$$p_1(x) \cdot p_2(x) = \int_{-1}^1 p_1(x)p_2(x) dx \quad p_1, p_2 \in P_3[x],$$

se considera el subespacio $S = \{ax + b(x - x^2) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

- (a) **(0.5 puntos)** Transforma la base $B = \{x, x - x^2\}$ de S en una base ortonormal del subespacio.
- (b) **(0.5 puntos)** Obtén la proyección ortogonal del vector $p = 1 - x + x^2$ sobre S .

4. **(1.5 puntos)** En una localidad hay 6.000 personas en edad laboral de las que sólo el 50% trabaja actualmente. Se sabe que cada año el 70% de las personas sin trabajo seguirán sin trabajar al año siguiente y que el 80% de las personas con empleo continuarán empleados al año siguiente. Calcula el número de parados que habrá al cabo de 7 años, diagonalizando para ello la matriz que describe el sistema, justificando que dicha diagonalización es posible.

Parte de Cálculo

5. Responder a las siguientes preguntas:

- (a) **(0.25 puntos)** Calcula $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n+1}{2+3n} \right)^{-n}$.
- (b) **(0.5 puntos)** Determina el carácter de las siguientes series numéricas:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n^3 - 2n}{6n + n^4 + 1} \quad \text{y} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{n!}{3^n}$$

- (c) **(0.25 puntos)** Halla los puntos interiores y los puntos de acumulación del conjunto

$$X = (-3, -2] \cup \mathbb{N} \cup \left\{ \frac{-1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}.$$

6. Calcula

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \operatorname{sen} x - \frac{x^2}{2}}{\arctan x - x}$$

- (a) **(0.75 puntos)** mediante l'Hôpital,
- (b) **(0.75 puntos)** utilizando los desarrollos de Taylor de grado 3 de las funciones implicadas.
7. Consideremos el recinto limitado por la curva $y = x^2$ la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$ y el eje OX .
- (a) **(1 punto)** Halla su área.
- (b) **(0.5 puntos)** Calcula el volumen del sólido generado al girar dicho recinto alrededor del eje OX .

Nota: Puede interesar saber que $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.