Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica)
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Examen final
8 de Febrero de 2003.

Observaciones:
1) La duración del examen será de 3 horas y media.
2) Escribir nombre y apellidos en todas las hojas. Escribir también el D.N.I. en la primera de ellas.
3) Escribir con bolígrafo (o similar) azul o negro (nunca a lápiz).
4) Situar el D.N.I. u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.
5) No fumar en el aula.
6) No podrá usarse calculadora.
7) Los alumnos que tengan alguna asignatura de Cálculo aprobada sólo tienen que hacer los dos primeros ejercicios y que tengan alguna asignatura de Álgebra aprobada tienen que hacer el resto.

1. Consideremos para cada valor de $m \in \mathbb{R}$ la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada a la base canónica es:
$$A = \begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2(m+1) & m+1 \end{pmatrix}.$$
   (a) **(0.75 puntos)** Determina para qué valores de m la aplicación lineal no es suprayectiva.
   (b) **(1.75 puntos)** Para el valor $m = 2$ calcula la potencia n-ésima de A, en cuyo proceso emplea el método de Gauss-Jordan para el cálculo de la inversa de la matriz de paso correspondiente.

2. **(0.5 puntos)** Calcular una base ortogonal de $W =< (-1, 0, 1), (2, 1, 9) >$.

3. **(0.5 puntos)** Analizar la convergencia de las siguientes series numéricas:
$$\sum_{n\geq 1} \frac{2n}{(n-1)!} \text{ y } \sum_{n\geq 1} (-1)^n$$

4. Responder a las siguientes preguntas:
   (a) **(0.75 puntos)** Calcular el polinomio de Taylor de grado 4 de la función $f(x) = \ln x$ desarrollado en el punto $a = 1$. Si utilizásemos dicho desarrollo para hallar el valor aproximado de $\ln 1.1$ acotar el error que se cometería en dicha aproximación.
   (b) **(0.25 puntos)** ¿En qué puntos es posible realizar el desarrollo de Taylor de la función $\ln x$? ¿Y el de la función $\sqrt{x}$?

5. **(0.75 puntos)** Calcular la integral:
$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} sen x \cdot \tan x dx.$$

Nota: Puede resultar de utilidad saber que $sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ y que $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. **(0.75 puntos)** Consideremos la función definida por $f(1,0)=3$ y para $(x,y)\neq(1,0)$ por

$$f(x,y)=\frac{x^3-y^3-1}{x-1+y^2}.$$

Estudiar la continuidad de dicha función en el punto $(1,0)$.

7. **(1 punto)** Determina la mínima distancia del punto $P(1,0)$ a los puntos de la parábola $y^2=4x$, utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange.

8. **(1 punto)** Justifica que las ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} xe^{u+v}+2uv & = & 1 \\ ye^{u-v}-\frac{u}{1+v} & = & 2x \end{array}$$

determinan a las variables u, v como funciones implícitas de x, y en un entorno del punto de coordenadas $(x,y,u,v)=(1,2,0,0)$. Halla las diferenciales $Du(1,2)$, $Dv(1,2)$, $D(u+v)(1,2)$.

9. **(1 punto)** Resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & x+y \quad + \quad 1+t \\ y' & = & x-y \end{array}\right. .$$