Ingeniero Técnico Industrial (Mecánica, turno de mañanas)
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Examen final (4 de Julio de 2003)

Observaciones:

1) La duración del examen será de 3 horas y media.

2) Escribir nombre y apellidos en todas las hojas. Escribir también la especialidad, el turno y el D.N.I. en la primera de ellas.

3) Escribir con bolígrafo azul o negro (nunca a lápiz).

4) Situar el D.N.I. u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.

5) No fumar en el aula.

6) No podrá usarse calculadora.

7) Los alumnos que tengan que realizar sólo un parcial realizarán los ejercicios que corresponden a dicho parcial. Los alumnos que hagan el examen completo realizarán el ejercicio 3, el ejercicio 4.a, el ejercicio 5, el ejercicio 6.b y además deberán:

- elegir entre (el ejercicio 1 y el ejercicio 2.d) ó (el ejercicio 2 y el ejercicio 1.d), y
- elegir entre (el ejercicio 4.b) ó (el ejercicio 6.a).

Primer parcial

1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) **(0.75 puntos)** Calcula su inversa mediante el método de Gauss-Jordan.

   (b) **(0.75 puntos)** Da la expresión analítica del endomorfismo f de $\mathbb{R}^4$ que tiene a A por matriz asociada en la base canónica. Halla el núcleo de dicho endomorfismo y di si f es inyectiva y|o sobreyectiva. ¿Cuál sería la matriz asociada a f tomando como base inicial $B = \{(1,0,-1,0),(0,1,0,1),(1,1,0,0),(0,0,0,-1)\}$ y como base final la canónica?

   (c) **(0.75 puntos)** Halla una matriz diagonal semejante a A y una matriz de paso.

   (d) **(0.25 puntos)** Escribe, si es posible, un sistema de ecuaciones lineales que sea incompatible y que tenga a A por matriz de coeficientes.

2. Responde a las siguientes cuestiones:

   (a) **(0.75 puntos)** Considerando $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar canónico, halla una base ortonormal de $U =< (1,1,0,0),(0,-1,1,0),(0,1,0,1) >$.

   (b) **(0.5 puntos)** Encuentra los vectores unitarios de $\mathbb{R}^4$ que forman 60° tanto con el vector $(1,0,0,0)$ como con el vector $(0,1,0,0)$ y de modo que la tercera componente sea negativa y la cuarta sea opuesta de la tercera.

   (c) **(1 punto)** Obtén la proyección ortogonal de los vectores del apartado anterior sobre U (si no has hecho el apartado anterior puedes hacerlo con el vector $(1,1,-1,1)$).

   (d) **(0.25 puntos)** ¿Qué propiedades cumplen los valores propios y los subespacios propios correspondientes a una matriz simétrica real?

3. Responde a las siguientes cuestiones:

   (a) **(0.5 puntos)** Comprueba si la sucesión $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ es o no convergente y en caso afirmativo calcula el valor de su límite.

   (b) **(0.75 puntos)** Determina si la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$ es o no convergente y en caso afirmativo calcula el valor de su suma.

   (c) **(1 punto)** Halla el polinomio de Taylor de grado 2 de la función $f(x) = \frac{3}{5+x^2}$ desarrollado alrededor del punto $a = 1$ y acota el resto en el intervalo $[1, 2]$

   (d) **(1 punto)** Calcula $\int \frac{\tan x}{1+\cos^2 x} dx$

   (e) **(0.75 puntos)** Estudia el carácter de la integral impropia $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{x^3+5x^2+1} dx$

Segundo parcial

4. Responde a las siguientes cuestiones:

   (a) **(1.5 Puntos)** Estudia la continuidad y la diferenciabilidad en el punto $(0, 0)$ de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (b) **(1.25 puntos)** Halla las derivadas parciales de segundo orden de $f(x, y, z) = (\frac{x}{y})^z$.

5. Responde a las siguientes cuestiones:

   (a) **(0.75 puntos)** Obtén el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x, y) = x^3 + y^2 + xy^2$ en el punto $(-1, 2)$.

   (b) **(1.25 puntos)** Utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar el punto de la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$ que está a distancia mínima del punto $P(1, 1, 0)$, así como el valor de dicha distancia mínima.

   (c) **(1.25 puntos)** Justifica que la ecuación $x^3z^2 - xyz^3 = 2$ define a z como función implícita de x e y en un entorno del punto $(1, 1, -1)$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1)$ y $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 1)$.

6. Responde a las siguientes cuestiones:

   (a) **(1.25 puntos)** Resuelve el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \\ y(0) = 1, y'(0) = 1 \end{cases}$$

   (b) **(0.75 puntos)** Resuelve la ecuación diferencial $y' = \frac{y}{x+y}$

   (c) **(1 punto)** Calcula $\iint\limits_{\Omega} y dx dy$, siendo Ω el recinto del plano definido por las desigualdades $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \leq y$, $y \geq 0$.