



**Variable Compleja y Transformadas**  
**Hoja 1**  
El Cuerpo de los números Complejos

1. Dados los números complejos  $z_1 = -2 - i$  y  $z_2 = -4 + i$ , calcula

a)  $z_1 + z_2$    b)  $3z_1 - 2z_2$    c)  $z_1 z_2$    d)  $(z_2)^{-1}$    e)  $\frac{z_1}{z_2}$

2. Dados los números complejos  $z_1 = 6i$  y  $z_2 = 8 - i$ , calcula

a)  $z_1 z_2$    b)  $\frac{z_1}{z_2}$    c)  $\frac{z_2}{z_1}$    d)  $z_2^2 - z_1$

3. Determina los valores de  $x$  e  $y$  para que se cumpla la igualdad  $(1 + i)(x + iy) = i$

4. Calcula el módulo de los números complejos:

a)  $3 + 4i$    b)  $\frac{1+i}{1-i}$    c)  $i^7 + i^{10}$    d)  $1 + i + i^2$

5. Expresa en forma polar o exponencial los siguientes números complejos:

a)  $2i$    b)  $-3i$    c)  $-1$    d)  $3$    e)  $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$   
f)  $-3 + i\sqrt{3}$    g)  $\frac{1+i}{1-i}$    h)  $i^7 + i^{10}$    i)  $3 + 3i$    j)  $1 + i + i^2$

6. Expresa los siguientes números complejos en forma binómica:

a)  $(1 + i)^3$    b)  $\frac{2+3i}{3-4i}$    c)  $i^5 + i^{16}$    d)  $1 + i + i^2 + i^3$   
e)  $\frac{1}{i}$    f)  $(1 + i\sqrt{3})^3$    g)  $2\pi/2$    h)  $1\pi/4$   
i)  $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$    j)  $(2 + 2i)^2$    k)  $(2 - 2i)^2$    l)  $(2 + 2i)(2 - 2i)$   
m)  $e^{-i\pi/2}$    n)  $2e^{-i\pi}$    ñ)  $3e^{-i\pi/2}$    o)  $2e^{-i\pi/4}$   
p)  $i + 3e^{i2\pi}$    q)  $e^{i\pi/4} - 2e^{-i\pi/4}$    r)  $\frac{1}{e^{-i\pi/4}}$    s)  $\sqrt{2}e^{i\pi/3}$

7. Representa gráficamente los conjuntos dados por las expresiones siguientes:

a)  $|z| = 1$    b)  $|z| \leq 1$    c)  $z + \bar{z} \leq 1$   
d)  $z - \bar{z} = i$    e)  $\text{Im}(z) < 0$    f)  $|\text{Re}(z)| < 1$   
g)  $\text{Re}(z) + \text{Im}(z) = z\bar{z}$    h)  $|z|^{-1} \geq 1, (z \neq 0)$    i)  $|z - 5i| = 8$   
j)  $\text{Im}(z^2) > 2$    k)  $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$    l)  $\text{Re}(z^2 - z) = 0$   
m)  $|z - 2| = |1 - 2\bar{z}|$    n)  $2 < |z| < 3$    ñ)  $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 1$   
o)  $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$    p)  $z + \bar{z} \geq |z|^2$

8. Comprueba que para cada par  $z, \omega \in \mathbb{C}$  se verifican las relaciones siguientes:

(a)  $|z - \omega| \geq ||z| - |\omega||$   
(b)  $|z - \omega|^2 + |z + \omega|^2 = 2(|z|^2 + |\omega|^2)$   
(c)  $|1 - \bar{z} \cdot \omega|^2 - |z - \omega|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |\omega|^2)$

9. Calcula las siguientes potencias de números complejos

a)  $(1 + i)^{100}$    b)  $(-1 + \sqrt{3}i)^{30}$    c)  $(\sqrt{1-i})^{10}$    d)  $\frac{1}{(1-i)^5}$

10. Calcula las siguientes raíces:

a)  $\sqrt[3]{1}$    b)  $\sqrt[3]{i}$    c)  $\sqrt[6]{-8}$    d)  $\sqrt[4]{-1}$   
e)  $\sqrt[8]{1}$    f)  $\sqrt{1-i}$    g)  $\sqrt{3+3i}$    h)  $\sqrt[3]{-2+2i}$   
i)  $\sqrt[3]{-1+i}$    j)  $\sqrt[4]{-8(1-\sqrt{3}i)}$    k)  $\sqrt[4]{-81}$    l)  $\sqrt[4]{1}$

11. Resuelve en  $\mathbb{C}$  las siguientes ecuaciones:

(a)  $z^2 + 1 = 0$    (b)  $z^3 + 2 = 0$    (c)  $z^5 + 64 = 0$    (d)  $(z^2 + 4)(z - 1)^2 = 0$

12. Demuestra que si  $z \in \mathbb{C}$  y  $\text{Re}(z) \neq 0$ , entonces  $|z| = 1 \iff \text{Re}(z) = \text{Re}(z^{-1})$

13. Sea  $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$  un polinomio con coeficientes reales ( $a_j \in \mathbb{R}$ ).

- (a) Comprueba que para cada  $z \in \mathbb{C}$ , se cumple la igualdad  $p(\bar{z}) = \overline{p(z)}$ .
- (b) Usando el apartado anterior, prueba que si  $z_0$  es solución compleja de  $p(z) = 0$ , entonces su conjugado  $\bar{z}_0$  también es solución.
- (c) Sabiendo que  $z = i$  es una raíz del polinomio  $p(z) = z^4 - 2z^3 - z^2 - 2z - 2$ , calcula todas sus raíces.
- (d) Calcula todas las raíces del polinomio,  $q(z) = z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1$ .

14. Expresa en forma binómica los siguientes números complejos:

a)  $(1+i)^{2/3}$     b)  $(1+\sqrt{3}i)^{3/4}$

15. Deduce una fórmula para calcular cualquier potencia de  $i^n$  con  $n \in \mathbb{N}$

16. ¿En qué vector se transformará el complejo  $-\sqrt{3} + 3i$  al girarlo un ángulo de  $\frac{\pi}{2}$  radianes?. ¿Qué ángulo se necesita para que el resultado sea  $2\sqrt{3}i$ ?

17. Expresa en forma trigonométrica los números complejos siguientes

a)  $-\frac{1}{2}i$     b)  $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$     c)  $\sqrt{3}$     d)  $-i$     e)  $-\frac{1}{2}$

18. Utiliza la fórmula de Moivre para obtener  $\cos(3x)$  y  $\sin(3x)$  en función de  $\cos(x)$  y  $\sin(x)$

19. Resuelve en  $\mathbb{C}$  las siguientes ecuaciones:

(a)  $z^2 - (6+i)z + (7+9i) = 0$

(b)  $z^2 - 2(2-i)z + 3(1-2i) = 0$

(c)  $z^4 + z^2 + 1 = 0$

20. Halla las cuatro raíces de  $z^4 + 4 = 0$  y úsalas para factorizar  $z^4 + 4$  como producto de dos polinomios de segundo grado con coeficientes reales.

21. Siendo  $z, w$  dos números complejos distintos y  $\frac{(z+w)i}{(z-w)} \in \mathbb{R}$ . Encuentra la relación entre  $|z|$  y  $|w|$ .

22. Encuentra los números complejos  $z$  tales que su cuadrado es igual a su conjugado.

23. Resuelve:  $\bar{z} = z^{n-1}$ , siendo  $n \in \mathbb{N} - \{2\}$ .

24. Demuestra la *identidad de Lagrange*, para se verifica

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} \Rightarrow (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

25. Resuelve las siguientes cuestiones:

- (a) Demuestra que todo número complejo  $z$  distinto de 1, pero con módulo 1, se puede expresar como

$$z = \frac{\alpha + i}{\alpha - i}, \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{R}$$

- (b) Sean  $z_1, z_2$  y  $z_3$  tres complejos con  $|z_j| = 1$ , tales que  $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ . Prueba que al menos uno debe ser igual a 1.

- (c) Encuentra 3 complejos  $z_1, z_2$  y  $z_3$  de módulo 1 que verifiquen:

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_1 z_2 z_3 = 1$$

26. Prueba que si  $z_1, z_2$  y  $z_3$  son tres complejos que verifican

$$|z_1| = |z_2| = |z_3|$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

entonces forman en el plano un triángulo equilátero.