



Apellidos:

Nombre:

Grupo:

DNI:

(Resuelve y entrega al menos 3 de los problemas que se detallan a continuación)

1. Calcula todos los números complejos z para los cuales $(1+z)(1-z)^{-1}$ es
 - (a) Un número real.
 - (b) Un número imaginario puro.
2. Comprueba que salvo que $z = x + iy$ sea un número real negativo, existe un único w , con $\operatorname{Re}(w) > 0$ tal que $w^2 = z$.
3. Comprueba que $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\left| a + \sqrt{a^2 - b^2} \right| + \left| a - \sqrt{a^2 - b^2} \right| = |a + b| + |a - b|$$

4. Prueba la siguiente identidad

$$\left| z_1 (1 + |z_2|^2) - z_2 (1 + |z_1|^2) \right|^2 = |z_1 - z_2|^2 |1 - z_1 \overline{z_2}|^2 - (z_1 \overline{z_2} - \overline{z_1} z_2)^2$$

5. Prueba la siguiente identidad

$$|1 - z_1 \overline{z_2}|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2) (1 - |z_2|^2)$$

6. Teniendo en cuenta el producto de los dos números complejos $z_1 = 1 + ia$ y $z_2 = 1 + ib$, comprueba que

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Utiliza la fórmula anterior para demostrar que

$$\pi = 4 \left[\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \right]$$

7. Los tres números complejos $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 1$ y $z_3 = i$, determinan un triángulo en el plano complejo. Al hacer girar el triángulo $\pi/6$ radianes alrededor del origen, ¿cuáles serán los complejos correspondientes a los nuevos vértices? Haz una representación gráfica del problema.
8. Hallar dos números complejos tales que su suma es $1 + 4i$, su cociente es imaginario puro, y la parte real de uno de ellos es -1 .
9. Calcula para $n \in \mathbb{N}$ el valor de la siguiente operación

$$(1 + \sqrt{3}i)^n + (1 - \sqrt{3}i)^n$$

10. Suponiendo que $z \in \mathbb{C}$, con $|z| = 1$, calcula el valor de $|1 + z|^2 + |1 - z|^2$.

11. Sea $z \in \mathbb{C}$, que cumple

$$\left| z - \frac{3}{4} \right| = \frac{1}{4}$$

Si definimos

$$w = \frac{2 - 3z}{4z - 3}$$

calcula

$$\left| w + \frac{3}{4} \right|$$

12. Dada la ecuación

$$z^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{3}i)z + p = 0$$

suponiendo que una de las raíces es $z_1 = -1 + i$, calcula el valor de p y la otra raíz.

13. Prueba que si $z \in \mathbb{C}$, con $\text{Im}(z) \neq 0$, entonces

$$\frac{z}{1 + z^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$$

Demuestra que si $\theta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\left(\frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta} \right)^n = \frac{1 + i \tan(n\theta)}{1 - i \tan(n\theta)}$$

14. Teniendo en cuenta que para $n \in \mathbb{N}$, y $z \in \mathbb{C} - \{1\}$

$$1 + z + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad (\text{Suma progresión geométrica})$$

demuestra que la suma de los n valores de $z^{1/n} = \sqrt[n]{z}$ es cero para $n \geq 2$, y aplica el resultado para demostrar que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \dots + \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = -1$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \dots + \sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0$$

15. Teniendo en cuenta que para $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C} - \{1\}$

$$1 + z + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad (\text{Suma progresión geométrica})$$

y utilizando el teorema de Moivre, demuestra que si $0 < \theta < 2\pi$, entonces

$$1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \dots + \cos(n\theta) = \frac{\cos\left(n\frac{\theta}{2}\right) \sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\sin(\theta) + \sin(2\theta) + \dots + \sin(n\theta) = \frac{\sin\left(n\frac{\theta}{2}\right) \sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$
