

Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso, I.T.I. Electrónica (Grupo 1)/Electricidad

Cuestionario sobre operaciones básicas, 30 de octubre de 2007

1. **Calcula $(5 + 5i)(-1 + 3i)$ y expresa el resultado en forma binómica.**

Solución:

$$(5 + 5i)(-1 + 3i) = -5 + 15i - 5i + 15i^2 = \boxed{-20 + 10i}$$

2. **Calcula $(3 + 2i)^3$ y expresa el resultado en forma binómica**

Solución: Resolvemos mediante el uso de la fórmula del binomio de Newton para la potencia tercera de una suma:

$$\begin{aligned}(3 + 2i)^3 &= \binom{3}{0}3^3 + \binom{3}{1}3^2(2i) + \binom{3}{2}3(2i)^2 + \binom{3}{3}(2i)^3 = \\&= 27 + 54i - 36 - 8i \\&= -9 + 46i\end{aligned}$$

3. **Calcula $\overline{(2 - i)(-1 + i)}(i - 3)$ y expresa el resultado en forma binómica.**

Solución: En este caso podemos calcular los conjugados antes de multiplicar o realizar primero la multiplicación de los dos primeros y posteriormente su multiplicación. Elegimos la segunda forma y calculamos el producto de los dos primeros:

$$(2 - i)(-1 + i) = -2 + 2i + i - i^2 = -1 + 3i$$

y ahora multiplicamos por el tercero:

$$\overline{(2 - i)(-1 + i)}(i - 3) = \overline{-1 + 3i}(i - 3) = (-1 - 3i)(i - 3) = -i + 3 - 3i^2 + 9i = \boxed{6 + 8i}$$

4. **Calcula $\frac{(1 + 2i)}{(1 - i)(2 + 3i)}$ y expresa el resultado en forma binómica.**

Solución: Calculamos el producto del denominador

$$(1 - i)(2 + 3i) = 2 + 3i - 2i - 3i^2 = 5 + i$$

que es más fácil de manejar, quitamos el complejo del denominador

$$\frac{(1 + 2i)}{(1 - i)(2 + 3i)} = \frac{(1 + 2i)}{(5 + i)} = \frac{(1 + 2i)(5 - i)}{(5 + i)(5 - i)} = \frac{5 - i + 10i - 2i^2}{25 + 1} = \boxed{\frac{7}{26} + i\frac{9}{26}}$$

5. **Calcula el módulo de $\frac{(-4 + 3i)}{(\sqrt{5} - 2i)}$.**

Solución: Utilizaremos las propiedades del módulo de un cociente y solamente será necesario calcular el módulo del numerador y denominador

$$\left| \frac{(-4 + 3i)}{(\sqrt{5} - 2i)} \right| = \frac{|(-4 + 3i)|}{|(\sqrt{5} - 2i)|} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + (3)^2}}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{16 + 9}}{\sqrt{5 + 4}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \boxed{\frac{5}{3}}$$

6. **Calcula $\sqrt[3]{125i}$ y escribe el resultado en forma binómica.**

Solución: Expresamos el número complejo del radicando en forma polar

$$125i = 125_{\pi/2}$$

Por tanto las raíces cúbicas de $125i$ tendrán como módulo común

$$|w_k| = \sqrt[3]{|z|} = \sqrt[3]{125} = 5$$

mientras que el argumento de cada una de las cuatro raíces cuartas vendrá dado por

$$\theta_k = \frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} \quad k = 0, 1, 2$$

Los números complejos en forma polar y binómica pedidos son:

$$k = 0 \Rightarrow w_0 = 5_{\pi/6} = 5 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 5 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \boxed{\frac{5\sqrt{3}}{2} + i \frac{5}{2}}$$

$$k = 1 \Rightarrow w_1 = 5_{5\pi/6} = 5 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 5 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \boxed{-\frac{5\sqrt{3}}{2} + i \frac{5}{2}}$$

$$k = 2 \Rightarrow w_2 = 5_{9\pi/6} = 5_{3\pi/2} = 5 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = 5(0 - i) = \boxed{-i5}$$

7. **Expresa $-8 + 8i$ en forma polar, expresando el ángulo en radianes**

Solución: Es un complejo situado en el segundo cuadrante, luego su ángulo se obtendrá sumándole π al correspondiente del cuarto cuadrante (que es el del primer cuadrante cambiado de signo)

$$|-8 + 8i| = \sqrt{(-8)^2 + (8)^2} = \sqrt{64 + 64} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

$$\theta = \arctan \frac{8}{-8} = \arctan -1 = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

El complejo en forma polar será

$$\boxed{(8\sqrt{2})_{\frac{3\pi}{4}}}$$

8. **Expresa** $\frac{(i^{20} + 3i^{49})}{(i^{88} - 2i^{243})}$ **en forma binómica**

Solución: En todos los casos calculamos el resto de la división del exponente de la unidad imaginaria i por 4

$$\begin{aligned} 20 &= 4 \cdot 5 + 0 \\ 49 &= 4 \cdot 12 + 1 \\ 88 &= 4 \cdot 22 + 0 \\ 243 &= 4 \cdot 60 + 3 \end{aligned}$$

y la expresión anterior es equivalente a:

$$\frac{(i^{20} + 3i^{49})}{(i^{88} - 2i^{243})} = \frac{(i^0 + 3 \cdot i^1)}{(i^0 - 2i^3)} = \frac{(1 + 3i)}{(1 + 2i)}$$

y hacemos la división correspondiente para expresar el número en forma binómica

$$\frac{(1 + 3i)}{(1 + 2i)} = \frac{(1 + 3i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{1 - 2i + 3i - 6i^2}{1^2 - (2i)^2} = \frac{7 + i}{5} = \boxed{\frac{7}{5} + i\frac{1}{5}}$$

9. **Expresa** $\frac{(1 - i)}{(1 + i\sqrt{3})}$ **en forma polar, expresando el ángulo en radianes.**

Solución: Al pedir el resultado en forma polar, podemos intentar en primer lugar realizar las operaciones correspondientes de producto y cociente en esta forma. Por tanto, vamos a expresar numerador y denominador de esta fracción en forma polar. Para el numerador tenemos:

$$\begin{aligned} |1 - i| &= \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \\ \theta &= \arctan \frac{-1}{1} = \arctan -1 = -\frac{\pi}{4} \quad \text{Complejo situado en el cuarto cuadrante} \end{aligned}$$

y para el denominador:

$$\begin{aligned} |1 + i\sqrt{3}| &= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2 \\ \theta &= \arctan \frac{\sqrt{3}}{1} = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \quad \text{Complejo situado en el primer cuadrante} \end{aligned}$$

y ahora se pueden realizar la operación correspondiente en forma polar

$$\frac{(1 - i)}{(1 + i\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}_{-\pi/4}}{2_{\pi/3}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{-\pi/4-\pi/3} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{-\frac{7\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$$

10. **Expresa** $\frac{2e^{i\pi/3}6e^{i\pi/4}}{4e^{-i17\pi/12}}$ **en forma binómica.**

Solución: Operamos directamente en forma polar antes de pasar a forma binómica,

$$\frac{2e^{i\pi/3}6e^{i\pi/4}}{4e^{-i17\pi/12}} = \left(\frac{2 \cdot 6}{4}\right)_{\pi/3+\pi/4-(-17\pi/12)} = 3_{2\pi} = 3$$

Nota: El requisito para superar el cuestionario es tener al menos 7 preguntas correctas. No está permitido el uso de calculadora con memoria ni programable. No obstante, todos los ángulos deben emplearse en radianes.